

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

56e jaargang

1980/1981

no. 4

december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 37,60. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 21,90. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 6,20 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

0, 1, 2, ...

ofwel

Wiskunde-onderwijs aan anderstaligen

JACK SCHILDER

1. Hoe moet je beginnen?

'Aan het begin van het schooljaar sta je voor een brugklasje met ongeveer 15 leerlingen, die geen woord nederlands spreken. Welke wiskundige activiteiten kunnen in de eerste les plaatsvinden?'

U zult misschien vragen 'Bestaan zulke situaties dan?'

Ja, dat komt tegenwoordig vaak voor, en wel in zogenaamde *Internationale Schakelklassen* (ISK). Op dit moment zijn er al zo'n 100 scholen voor voortgezet onderwijs, die een ISK-afdeling hebben.

Oorspronkelijk opgezet als speciale voorziening voor kinderen van gastarbeiders ontwikkelde de ISK zich al snel tot een opvangmogelijkheid voor allerlei soorten anderstalige leerlingen: gastarbeiderskinderen, chinezen, kinderen van politieke vluchtelingen etc.

Kinderen van 12 tot 17 jaar, uit allerlei culturen, met de meest uiteenlopende vooropleidingen, maar met één gemeenschappelijk kenmerk: *ze spreken te weinig nederlands om in het 'gewone' voortgezet onderwijs bevredigend te kunnen functioneren.*

Dus, stel het je voor: je staat op de eerste dag van het schooljaar voor zo'n groepje leerlingen, die vloeiend hun eigen taal spreken, maar geen nederlands (en ook geen engels!). Je wilt proberen in een jaar tijd het brugklasprogramma door te werken, waarna ze naar een 'nederlandse' tweede klas gaan.

Waarmee zou je beginnen?

Een zinvolle suggestie is: proberen de *beginsituatie* nader te bepalen.

Op de ISK-Berlage¹) doen we dat vóór de eigenlijke lessen beginnen. De manier waarop komt later in dit artikel ter sprake. Voorlopig volstaan we met de mededeling, dat het niveau van het groepje leerlingen uit ons probleem het best kan worden omschreven met: 'met goede resultaten de lagere school doorlopen'.

We keren terug naar de vraag, die we aan het begin van dit artikel hebben gesteld: 'Je gaat je eerste les geven aan een groepje potentiële mavo/havo/vwo-leerlingen, die nog geen woord nederlands spreken.

Welke wiskundige activiteiten zullen in de eerste les plaatsvinden?'

In de eerste les moeten de leerlingen *leren tellen*, in het nederlands!

2. Het ontstaan van '0,1,2,...'

In augustus 1975 was ik nog ongeveer twee jaar verwijderd van mijn doktoraalexamen (dacht ik), en had ik net de didaktiekkolleges met sukses afgesloten. Een baantje van ongeveer 10 uur om wat ervaring op te doen leek me wel aardig.

Toen ik op de ISK-Berlage (toendertijd één van de eerste ISK's) terechtkwam, werd ik geconfronteerd met het hierboven geschetste probleem. Gewapend met theoretische kennis en wat hospitium- en bijleservaring ging ik dapper aan de slag. Ik begon met ze te leren tellen, maar wat ik daarna moest doen, wist ik ook niet. Ik probeerde na een tijdje het meetkunde-brugklasdeel van Getal en Ruimte (de methode, die op de Berlage S.G. wordt gebruikt). De eerste regel in het boek was:

'Figuren die je zeker al kent, zijn: rechthoek, vierkant, driehoek en cirkel.' Alleen in deze ene regel stonden minstens tien *woorden*, die de leerlingen 'zeker' niet kenden. Andere voorbeelden van moeizaam gepruts in dat eerste jaar zal ik u besparen.

In het tweede jaar had ik een aantal 'blijvers' in de klas. 'Blijvers' zijn leerlingen, die nog een tweede jaar de ISK doen. Genoemde leerlingen hadden het hele jaar daarvoor les gehad van mijn kollega. Ze zwoeren bij hoog en bij laag, dat ze de woorden 'diagonaal' en 'coördinaten' nog nooit van hun leven hadden gehoord. Mijn eigen ervaring met de eerste regel van Getal en Ruimte, gekombineerd met deze nieuwe ervaring, zorgden er (eindelijk) voor dat het lampje ging branden.

Ik kwam tot twee konklusies:

- 1 de leerling moet eerst leren *praten*, *verstaan* en *begrijpen*, voordat je kunt proberen hem wiskunde te laten bedrijven
- 2 de bestaande wiskunde-methodes zijn niet geschikt voor dit soort onderwijs: ze zijn geschreven voor leerlingen die behoorlijk nederlands spreken.

Het gevolg lag voor de hand: ik moest zelf iets gaan maken. Dit is in de afgelopen jaren uitgroeid tot een brugklasmethode onder de titel '0,1,2,...', die nu al op ongeveer 25 scholen met een ISK wordt gebruikt.

In die beginfase kon je overigens nauwelijks spreken van een methode: ik maakte een serie meetkunde-stencils, terwijl voor de algebra de trukendoos nog volledig open ging. De komst van een nieuwe klas had een aantal algebra-stencils tot gevolg:

- leren tellen
- terminologie als *plus*, *min*, *optellen*, etc.
- verzamelingsleer met alle bijbehorende termen

Alles bij elkaar achteraf aangeduid als de eerste druk van '0,1,2,...'.

Op dat moment, na zo'n anderhalf jaar, kwam er weer wat boven van de didaktische theorieën. Immers, bij het in gang zetten van een onderwijsleerproces is de volgende gang van zaken gebruikelijk:

- 1 het bepalen van je doelstellingen
- 2 het bepalen van de beginsituatie
- 3 het kiezen van een werkwijze om vanuit de beginsituatie je doelen te bereiken

Welnu, de doelstelling van de ISK stond al een jaar of twee op papier:

'de leerlingen een zodanige didaktische aanspreekbaarheid bijbrengen, dat ze in het normale nederlandse onderwijs kunnen worden geïntegreerd'.

Kernachtig geformuleerd, maar wel vaag omtrent de uitwerking. Voor de wiskunde heb ik deze doelstelling opnieuw geformuleerd:

'de leerling in staat stellen in de tweede klas het normale wiskunde-onderwijs te volgen, d.w.z. het kunnen werken met een gangbare methode, zowel wat betreft de wiskunde 'op zich', als wat betreft het taalgebruik van het boek, docent en medeleerlingen'.

Dit is de doelstelling geworden van '0, 1, 2, ...'.

3. De beginsituatie

Globaal gesproken kun je in een gewone mavo/havo/vwo-brugklas uitgaan van de volgende beginsituatie:

- kinderen van 12 of 13 jaar, die allemaal in augustus op school komen
- gewend aan nederlandse normen
- redelijk behuisd, d.w.z. met een gelegenheid om huiswerk te maken
- met een redelijke emotionele achtergrond
- met een voltooide lagere school opleiding
- met een deskundig advies van de lagere school en/of CITO

Hoe anders is de situatie op een ISK:

- van kinderen van 12 jaar tot bijna-volwassenen van soms al 18 jaar, die zich het hele schooljaar door aanmelden
- kinderen, die komen uit landen, waar lijfstraffen soms nog heel gewoon zijn
- leerlingen, die met nog 10 of 12 personen op drie kamers wonen
- kinderen van politieke vluchtelingen, die talloze vormen van ellende achter de rug hebben, of kinderen, die onder de dreiging leven elk moment het land uitgezet te kunnen worden
- leerlingen, die al een tijdje in de zesde klas van de basisschool hebben gezeten, maar ook leerlingen die helemaal 'vers' zijn
- leerlingen van 16 jaar, die de tafels van vermenigvuldiging nog niet beheersen, maar ook leerlingen, die al kwadratische vergelijkingen kunnen oplossen.

Voor alle duidelijkheid: ondanks deze waslijst van problemen is het verschrikkelijk leuk om les te geven op een ISK! Maar, bovenstaande zaken hebben wel hun invloed op het onderwijsleerproces. Een aantal van die zaken zijn 'ongrijpbaar', maar het heeft ook een tijdje geduurd, voordat er iets zinvol gebeurde met de 'meetbare' verschillen tussen de leerlingen. Als je het schooljaar begint met ongeveer 90 leerlingen en je kunt zes klassen vormen, dan rijst meteen de vraag, hoe je de leerlingen over die zes groepen verdeelt. Het vormen van

heterogene groepen lijkt nauwelijks zinvol gezien de enorme verschillen in vooropleiding.

Toen ik op de ISK kwam, werd geprobeerd intelligentie en aanleg te meten m.b.v. *bestaande* intelligentie-tests, waarvan op dat moment niet duidelijk was, dat ze helemaal niet cultuur-vrij waren! Er werd gewerkt met de zgn. Raven-test²), een tangram-test, e.d. De uitslagen waren veelzeggend over het cultuur-vrije van deze tests: chinezen waren super-intelligent en marokkanen waren het tegengestelde daarvan. Als rekentoets werd het 'Schiedamse model' gebruikt. Een aardig detail: er stonden ook staartdelingen bij, zoals

$$7/100 \backslash \dots$$

Het 'aardige' was, dat deze notatie typisch nederlands is; in allerlei landen worden andere notaties gebruikt! Ook bevatte deze test enige vraagstukjes over *nederlands* geld:

$$3 \text{ stuivers} = \dots \text{ cent}$$

Het gevolg was, dat er heel heterogene groepen ontstonden en dat er na de observatieperiode van zes weken met bijna alle leerlingen geschoven werd, terwijl ze net een beetje aan de situatie gewend waren.

Bleken intelligentie en aanleg niet cultuur-vrij meetbaar, de verschillen in vooropleiding bleken wel behoorlijk objectief meetbaar.

Als de leerlingen op school komen, maken ze een drietal zelf ontworpen tests:

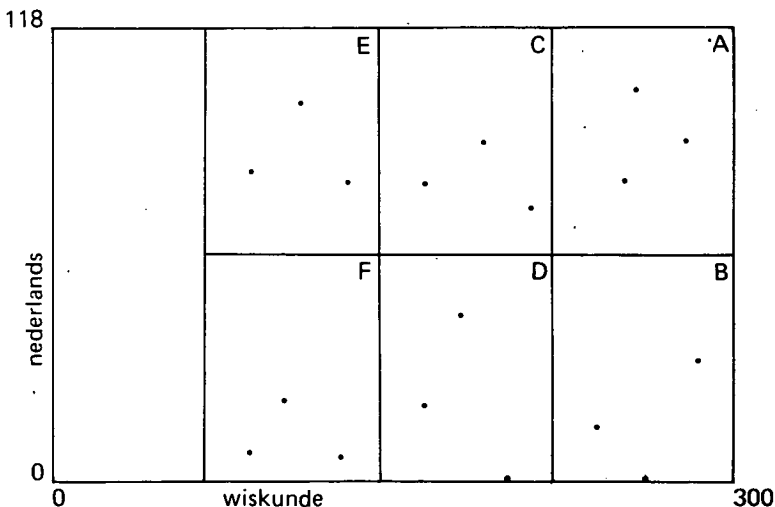
1 *een test nederlands*

Hiermee kunnen we bepalen, hoe aanspreekbaar de leerling al is.

2 *een taal- en cultuurvrije rekentoets*

3 *een redactionele rekentoets, die in de taal van de leerling is vertaald*

Door de scores van 2 en 3 samen te nemen, kunnen we de leerlingen als punt weergeven in een grafiek (zie figuur 1).



Figuur 1

De groepsindeling m.b.v. deze grafiek geeft een behoorlijke mate van homogeniteit, die zich niet beperkt tot het vak wiskunde. Niettemin: er zijn natuurlijk 'mis-fits'. In de observatieperiode ontwikkelt zich in elke klas *een eigen tempo*, en de echt misplaatste leerlingen springen er dan al heel vlot uit.

De beginsituatie, waarvan in '0,1,2,...' wordt uitgegaan, is een compromis: 'leerlingen, die net zo goed kunnen rekenen als een beginnende nederlandse brugklasleerling, maar die geen woord nederlands spreken'.

De bezwaren, die aan dit compromis kleven, zijn onmiddellijk aan te wijzen:

- er ontstaan misschien problemen voor leerlingen, die rekenachterstanden hebben.

- voor leerlingen, die heel langzaam nederlands aanleren, is het tempo van '0,1,2,...' te hoog, ook al werken ze het boek nog zo langzaam door.

Sinds het vorige cursusjaar experimenteren we met een serie kleine boekjes onder de titel 'Nul, een, twee, ...', waarmee we proberen bovenstaande bezwaren te ondervangen.

- is het begin niet te kinderachtig voor die leerlingen, die al aardig nederlands spreken?

In de praktijk blijkt dat best mee te vallen. Leerlingen, die al prima in het nederlands kunnen tellen, blijken vaak in het geheel nog niet foutloos te kunnen schrijven! De fonetische weergave van '5' ziet er in het turks uit als: fayf. Aan de andere kant werkt het 'gemakkelijke' begin enorm motiverend. Veel leerlingen vinden het leuk om thuis gewoon verder te werken. In hogere groepen komt het regelmatig voor, dat de hele klas een bladzijde of dertig verder is dan de klassikale korrektie!

- wat doe je met leerlingen, die al kwadratische vergelijkingen kunnen oplossen?

In de praktijk van de afgelopen jaren is gebleken, dat deze leerlingen meestal van chinese herkomst zijn, en vaak de meerderheid vormen in een B-groep. De verklaring van dit verschijnsel gaat buiten het bestek van dit artikel, maar opgemerkt moet worden, dat kinderen in Hong-Kong nog 'ouderwets' goed leren rekenen en verder dat chinezen sterk symbolisch zijn ingesteld (kijk maar naar hun schrift met de talloze verschillende karakters).

Van alle anderstalige leerlingen hebben de chinese de meeste moeite met het aanleren van nederlands. Het gevolg is dat een snellere doorstroming voor hen praktisch onmogelijk is.

Blijft over: de kleine groep leerlingen, die zowel een goede vooropleiding heeft alsook heel snel nederlands aanleert. Sommige van deze leerlingen zijn na de kerstvakantie klaar met '0,1,2,...', mogen dan in het boek van de tweede klas beginnen, krijgen extra lessen natuurkunde en duits, en maken aan het eind van het schooljaar de sprong naar een *derde* klas.

4. Werkwijze en vormgeving van '0,1,2,...'

Is in de vorige paragrafen het probleem van een aantal kanten omschreven, nu wordt het hoog tijd voor wat concrete voorbeelden. Ter illustratie zijn stukjes uit '0,1,2,...' opgenomen.

4.1. Taal-loze wiskunde?

Als je voor het eerst lesgeeft aan anderstaligen, kom je licht in de verleiding om taal-loze wiskunde te gaan geven. Waar dat toe leidt is al eerder opgemerkt: leerlingen kennen de meest elementaire woorden na een jaar nog niet. Hieronder enkele voorbeelden om te laten zien, dat je taal-loos een aardig eind kan komen:

'goed'	'fout'
wat zijn de coördinaten van A en B?	vul in: A(...) B(...)
hoe lang is CD?	CD = ... cm
is 1 een element van $\{1,2,3\}$?	vul in: $\in$ of $\notin$ 1 ... $\{1,2,3\}$
vul in: de tegenwoordige tijd van <i>maken</i> ik jij hij	vul in: ik maak jij hij
waarom is ☐ geen vierkant?	?????

Het woordje 'fout' betekent niet, dat je de 'rechtse' stijl helemaal niet mag gebruiken. De rechtse stijl is 'fout', als je hem gebruikt om de linkse stijl te *vermijden*. De linkse stijl is je doel!

Meteen rijzen dan de volgende vragen:

- welke woorden leer je aan?
- hoe leer je die woorden aan?
- hoe oefen je dat woordgebruik in?

4.2. Welke woorden leer je aan?

Allereerst moet je een inventarisatie maken van het gewone nederlandse, dat een nederlandse leerling al uit het basisonderwijs meeneemt naar de eerste wiskunde-les. Een willekeurige greep uit de lijst termen voor het vak wiskunde: optellen, goed, fout, uitkomst, groter dan, grootste, te groot, midden, teken, meet, waarom, omdat, cijfer, getal, ...

Aan de andere kant moet je ook inventariseren: je bekijkt een stel gangbare methodes op gebruikelijke terminologie en voorkomende 'standaard'-zinnen. Na deze inventarisatie heb ik de bewuste keuze gedaan om een beperkt aantal termen *niet* te gebruiken. Termen als *complement van een hoek*, *supplement van een hoek*, *oorsprong*, *deeltal*, *aftrekker*, *aftrektal* vormen naar mijn smaak alleen maar een traditioneel stuk ballast.

Als je gaat kijken naar eventuele standaard-zinnen, dan schrik je toch wel even. De schrijvers slagen erin volzinnen te produceren, die vaak volmaakt overbodig zijn en die nederlandse kinderen ook niet begrijpen. Enkele minuten bladeren in wat boeken is voldoende voor de volgende 'vondsten':

- een hoek is de figuur, die bestaat uit twee halve lijnen die hetzelfde grenspunt hebben (Sigma 1mhv, blz. 82; Getal & Ruimte NB1, blz. 125 met 'beginpunt' in plaats van 'grenspunt')

- een gestrekte hoek is een hoek, waarvan de benen in elkaars verlengde liggen (Sigma 1m hv, blz. 82; Getal & Ruimte NB1, blz. 125)
- a van een getal aftrekken kan worden vervangen door het tegengestelde van a bij dat getal optellen (Moderne Wiskunde 2, blz. 73)
- meten is het vergelijken van een grootte met een eenheid (Natuurkunde, blz. 11, Schweers & Van Vianen)
- Begrijp dus goed:
Als we een éénterm tot een macht verheffen door factor voor factor tot die macht te verheffen, dan moeten we dus ook de getalfactor van die éénterm tot die macht verheffen en de uitkomst uitrekenen (het lijkt komisch, maar het staat er echt: Gids voor de nieuwe wiskunde, 1a, blz. 216).

Het voorgaande betekent niet, dat er geen woordelijke definities in '0,1,2,...' voorkomen, of dat er geen expliciteringen worden gegeven of gevraagd. Wel acceptabel vind ik bijv. de definitie van een gelijkbenige driehoek. Mijn bezwaar tegen bovenstaande voorbeelden is, dat het taalgebruik té moeilijk is (zeker voor de anderstalige leerling), terwijl er eenvoudigere alternatieven te vinden zijn.

Daarnaast is me opgevallen, dat er in de gangbare methodes weinig wordt gedaan met definities en expliciteringen. Met het laten reproduceren van definities (Sigma 1m hv) toets je eigenlijk alleen de bereidheid om iets uit het hoofd te leren. Ik geef de voorkeur aan vragen, als

- waarom is dit (g)een?
- waarom is dit (niet) waar?

Dan moet de leerling toch vaak de bewoordingen van de definitie gebruiken. Kortom je toetst of hij kan expliciteren en of het begrip aanwezig is.

Hier zien we een kenmerkend verschil met de gangbare methodes: in '0,1,2,...' komen veel waarom-vragen voor, in de gangbare methodes heel weinig.

Ter illustratie: de fraaie definities van een 'hoek' en een 'gestrekte hoek' worden noch in Sigma, noch in Getal & Ruimte gevolgd door een waarom-vraag!

4.3. Hoe leer je woorden en begrippen aan?

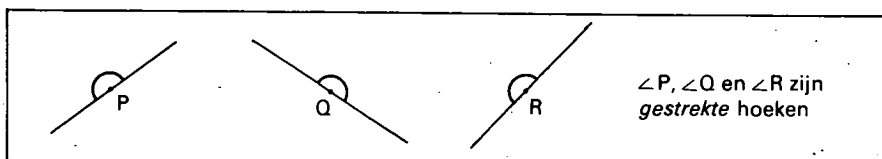
Het zal duidelijk zijn, dat het weinig zin heeft de anderstalige leerling te confronteren met te moeilijk taalgebruik. Wat is het alternatief?

Welnu, waar dat niet tot onverantwoorde trukjesvorming leidt, is in '0,1,2,...' gekozen voor de *aanschouwelijkheid*.

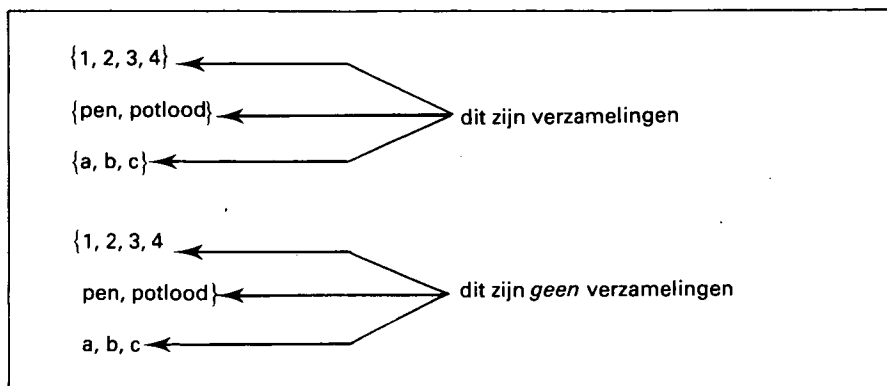
Enkele voorbeelden:

Vgl. blz. 35 van '0,1,2,...': (apart bijgevoegd)

Vgl. blz. 47 van '0,1,2,...':



Vgl. blz. 66 van '0,1,2,...':



Vergelijk het bovenstaande met Getal en Ruimte, NB1, blz. 38:

‘Als we weten welke elementen er in een verzameling zitten, dan kunnen we die verzameling noteren door de elementen tussen accolades te zetten, met komma’s ertussen’.

Dit laatste wordt gelukkig wel gevolgd door voorbeelden, maar niet door *non-voorbeelden*!

Een ander kenmerkend verschil met de gangbare methodes: in ‘0,1,2,...’ worden vele begrippen geïllustreerd met voorbeelden en non-voorbeelden.

4.4. Hoe oefen je het woordgebruik in?

In de praktijk is gebleken, dat je de anderstalige leerling, zeker in de beginfase, de woorden een aantal keer moet laten opschrijven.

Vgl. blz. 67 van ‘0,1,2,...’:

Opgave 4. Vul in: een element

geen element

- a 1 is van $\{1, 2, 4\}$
- b 3 is van $\{1, 2, 4\}$
- c 0 is van $\{1, 2, 4\}$
- d 2 is van $\{1, 2, 4\}$
- e $1\frac{1}{2}$ is van $\{1, 2, 4\}$
- f 4 is van $\{1, 2, 4\}$

Met dit soort opgaven door het hele boek heen, wordt zowel het nieuwe woordgebruik ingeoefend, als gesorteerd. Ook hier zien we een verschil met de gangbare methodes: daarin wordt van de leerlingen zelden een actief gebruik van de terminologie gevraagd.

4.5. Welke invloed heeft de speciale doelstelling van de ISK op de keuze en de indeling van de leerstof?

Uitgaande van de beginsituatie, dat de leerling nog geen woord nederlands spreekt, is in het beginstuk van ‘0,1,2,...’ gekozen voor een zodanige leerstof-indeling, dat op een zo natuurlijk mogelijke manier een zo groot mogelijke communicatie-basis wordt geschapen. Die communicatie-basis bestaat uit een gedeelte van de woordenschat, die een nederlandse brugklasleerling al wel bezit. Een zo natuurlijk mogelijke manier houdt in, dat de leerlingen in de beginfase

zoveel mogelijk dingen 'leren', die ze in hun eigen taal al lang kenden en konden. Ter illustratie volgt hieronder een tabel met een chronologische lijst met woorden, die ze leren terwijl ze met wiskunde bezig zijn.

TABEL 1. Chronologische woordenlijst

1. 'leren tellen'	25. goed	49. wat is de naam van
2. en	26. fout	50. meten
3. potlood	27. ja	51. noemen
4. pen	28. nee	52. samen
5. stoel	29. kleiner dan	53. cirkel
6. tafel	30. groter dan	54. middelpunt
7. boek	31. even groot als	55. straal
8. bladzijde	32. half	56. vierkant
9. woordenboek	33. anderhalf (!)	57. zijde
10. zoek op in het woordenboek	34. geen	58. diagonaal
11. wiskunde	35. cijfer	59. rechthoek
12. opgave	36. getal	60. vierhoek
13. invullen	37. maken	61. vijfhoek
14. enkelvoud	38. wat kun je doen met	62. langer dan
15. meervoud	39. schrijven	63. korter dan
16. liniaal	40. tekenen	64. even lang als
17. passer	41. vraag	65. alle
18. driehoek	42. antwoord	66. niet
19. geodriehoek	43. hoeveel	67. overstaande zijden
20. je moet een ... kopen	44. ligt tussen	68. in een ...
21. plus	45. lijnstuk	69. welke
22. min	46. hoe lang is	
23. maal	47. hoe heet	
24. gedeeld door	48. wat is de lengte van	

Ter illustratie is blz. 34 van '0,1,2,...' afgedrukt om te laten zien, dat je met deze woordenschat al een heel stuk 'normale' wiskunde kunt bedrijven. Op het moment, dat de leerling ongeveer 250 woorden geleerd heeft, kun je stellen, dat er een goede communicatie-basis aanwezig is. De overige 'achterstallige' terminologie wordt daarna aangeleerd op plaatsen, waar de leerstof-keuze er om vraagt.

4.6. *Vormgeving van '0,1,2,...'*

De discussie leerboek versus werkboek hoeft op deze plaats niet te worden gevoerd. Een werkboek geeft voor de anderstalige leerling een gemakkelijker instap dan een leerboek. Vergelijk de afgedrukte bladzijde 1 van '0,1,2,...' (apart bijgevoegd).

Als je dit in een leerboek zou willen doen, dan zit je meteen al met de gecompliceerde opdracht: 'Schrijf over in je schrift en vul in:'. Je geeft de leerlingen het werkboek, en het is volstrekt duidelijk wat ze moeten doen.

5. De werkwijze in de klas

De leerlingen beginnen op bladzijde 1 van het boek en moeten alles wat daarna komt gewoon doen. Op deze manier kunnen ze het werkboek geheel zelfstandig doorwerken. De voordelen:

- de leerlingen, die sneller kunnen doorstromen, hebben dan de mogelijkheid om de brugklasstof in 3 maanden door te werken
- de leerlingen, die na augustus in een klas geplaatst worden, hebben de mogelijkheid om op eigen houtje de klas in te halen
- op het moment, dat we genoeg leerlingen hebben voor één of twee nieuwe klassen, dan worden deze gevormd; deze klassen zijn soms wat minder homogeen dan de bestaande, dus de mogelijkheid tot interne differentiatie is aanwezig

De belangrijkste activiteiten tijdens de les zijn:

- de leerlingen werken zelfstandig in het werkboek
- er wordt altijd *klassikaal* gecorrigeerd

Dit laatste is een bewuste en noodzakelijke keuze. De argumenten:

- als een leerling in het boek $4 + 9 = \dots$ leest, en dan 13 opschrijft, betekent dat helemaal niet, dat hij op de mondelinge vraag 'Hoeveel is vier plus negen?' ook een antwoord geeft
- het voor zichzelf lezen en schrijven van woorden als 'vermenigvuldigen' en 'deelverzameling' is nog iets heel anders dan het zelf hardop kunnen zeggen of het woord herkennen als het wordt uitgesproken door de docent of een medeleerling
- in wat groter verband gezien, dient de leerling vertrouwd gemaakt te worden met de volgende veel voorkomende gang van zaken (in het vervolgonderwijs, in de werkring, op een feest, bij de dokter, ...):

vragen stellen

luisteren + begrijpen + antwoord geven + luisteren + ...

verhaal vertellen

De oefeningen in '0,1,2,...' worden dan óók gebruikt als oefeningen in het hardop lezen. Tijdens de klassikale correctie komen ook 'uitstapjes' voor. Hoewel in de gangbare methodes de waarom-vragen nogal ontbreken, zal dat de wiskunde-docenten in nederland er niet van weerhouden om ze te stellen. Misschien kan er bij nederlandse leerlingen van worden uitgegaan, dat ze redelijk in staat zijn, een antwoord op een waarom-vraag te formuleren. Zeker is, dat de anderstalige leerling dat echt moet leren. Vandaar dat deze vragen ook konsekwent in '0,1,2,...' staan. Tijdens de klassikale correctie worden de leerlingen daarop regelmatig vergast. Op een zeker moment leren ze dan het woord 'daarom' kennen ... Dit is een tijd lang een grote bron van vermaak, en het gaat wel eens zo ver, dat er, al samenvattend, op het bord komt:

antwoord 1: daarom

antwoord 2: ...

Kortom, de leerling moet niet alleen wiskunde kunnen maken, hij moet ook wiskunde kunnen praten.

6. Slotbeschouwing

De studenten van de lerarenopleiding d'Witte Leli in Amsterdam, die op de ISK een schoolpraktikum doen, merken elke keer weer op, dat ze op een heel bijzondere manier met onderwijs bezig zijn. Zaken; die ze als vanzelfsprekend beschouwen, blijken dat opeens niet meer te zijn. De meest elementaire zaken blijken belangrijk te zijn. Ze ondervinden aan den lijve, dat je als leraar veel te grote stappen kunt nemen. Onderdelen uit de didaktische theorie als beginsituatie, voorbeelden/non-voorbeelden, sorteren en faseren krijgen opeens een heel concrete invulling. Deze ervaringen heb ik zelf ook opgedaan, maar dan al vier jaar lang. Dat heeft zijn weerslag gehad op '0,1,2,...', zij het soms heel onbewust. Je ontdekt, dat je methodiekjes toepast, waarvan het niet duidelijk is, of ze ook niet met succes op nederlandse kinderen zouden kunnen worden toegepast.

Maar, ik zou die ontdekking nooit gedaan hebben, als ik niet in deze speciale situatie was beland. De Zwitserse onderwijzer en pedagoog, Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), zei het al:

'Wat niemand zoekt, wordt zelden gevonden'.

Noten:

- 1 ISK-Berlage is de afkorting van Berlage Scholengemeenschap, afd. Internationale Schakelklassen, Hortusplantsoen 2, Amsterdam.
- 2 De Raven-test bestaat uit een serie vellen. Op elk vel staat een grote 3×3 -matrix met symbolen. Acht van de negen zijn ingevuld. De negende moet je dan kiezen uit zes mogelijkheden, die onderaan het vel zijn gegeven.

Geïnteresseerden kunnen een exemplaar van '0, 1, 2, ...' bestellen (kosten ongeveer f 25,-) door contact op te nemen met de auteur (02993-62295).

Over de auteur:

Jack Schilder deed in 1978 doktoraal-examen wiskunde aan de G.U., en is sinds 1975 werkzaam als leraar wiskunde aan de Berlage Scholengemeenschap te Amsterdam.

0 = nul	
1 = een	11 = elf
2 = twee	12 = twaalf
3 = drie	13 = dertien
4 = vier	14 = veertien
5 = vijf	15 = vijftien
6 = zes	16 = zestien
7 = zeven	17 = zeventien
8 = acht	18 = achttien
9 = negen	19 = negentien
10 = tien	20 = twintig

Opgave 1. Vul in:

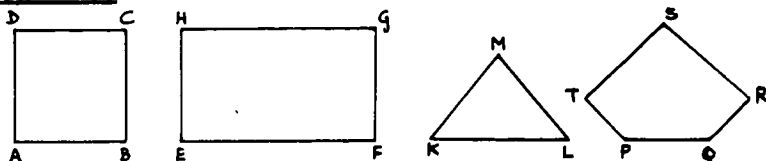
- | | |
|--------------|---------|
| a) 10 = | l) 20 = |
| b) 8 = | m) 17 = |
| c) 6 = | n) 14 = |
| d) 4 = | o) 11 = |
| e) 2 = | p) 19 = |
| f) 7 = | q) 15 = |
| g) 9 = | r) 18 = |
| h) 5 = | s) 16 = |
| i) 3 = | t) 12 = |
| j) 1 = | u) 13 = |
| k) 0 = | |

10 = tien	60 = zestig
20 = twintig	70 = zeventig
30 = dertig	80 = tachtig
40 = veertig	90 = negentig
50 = vijftig	100 = honderd

Opgave 2. Vul in:

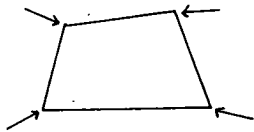
- | | |
|---------------|----------|
| a) 50 = | f) 100 = |
| b) 10 = | g) 40 = |
| c) 90 = | h) 80 = |
| d) 20 = | i) 30 = |
| e) 70 = | j) 60 = |

Opgave 7.

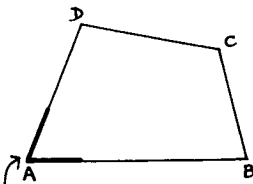


- a) Noem de zijden van de driehoek.
- b) Wat is de lengte van de zijden van het vierkant?
- c) Is EF even lang als EG?
- d) Meet de zijden van de driehoek.
- e) Zijn AC en BD de zijden van het vierkant?
- f) EFGH is een
- g) Hoe lang zijn de zijden van KLM samen?
- h) Wat is de naam van het vierkant?
- i) Teken de diagonalen van PQRST.
- j) Noem de diagonalen van PQRST.
- k) Tussen de rechthoek en de vijfhoek ligt de
- l) Hoe lang zijn de diagonalen van EFGH samen?
- m) Hoeveel diagonalen heeft de driehoek?
- n) Zijn de diagonalen van het vierkant even lang?

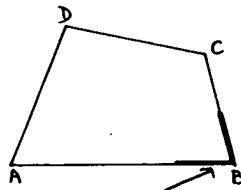
* * *



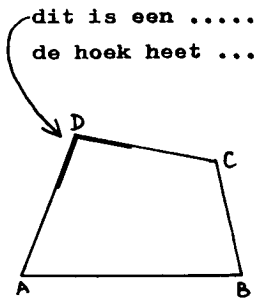
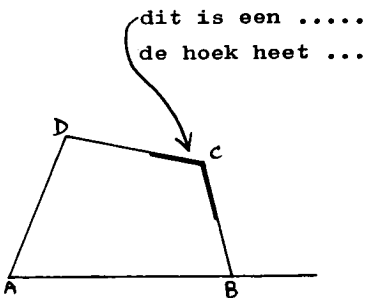
dit is een vierhoek, omdat
 hij vier hoeken heeft



dit is een hoek
 de hoek heet $\angle A$



dit is een
 de hoek heet $\angle B$



Rechte lijnen

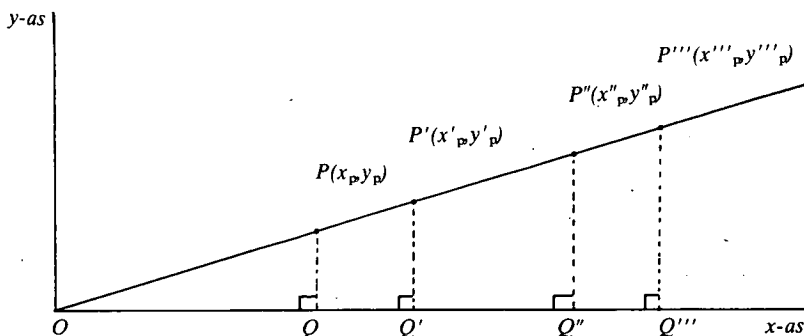
C. J. PENNING

Als we op het punt staan het hoofdstuk rechte lijnen te gaan behandelen, vragen we ons af door welke ingang we de leerlingen het beste kunnen binnenleiden.

Men zou kunnen uitgaan van het functiebegrip. Het grote bezwaar hier is het cruciale punt dat de grafiek van een lineaire functie een rechte is.

Men zou ook van het begrip rechte lijn kunnen uitgaan en aantonen dat de vergelijking ervan een lineaire functie is. Per slot is de leerling in de brugklas vertrouwd geraakt met het (intuïtieve) begrip rechte en halfrechte. Verder nemen we aan dat de gelijkvormigheden zijn behandeld. Men zou dan als volgt te werk kunnen gaan.

Teken in het eerste kwadrant van een assenstelsel een halfrechte vanuit O .



Vanwege gelijkvormigheden zien de leerlingen allereerst in dat voor deze halfrechte geldt:

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'} = \frac{P''Q''}{OQ''} = \frac{P'''Q'''}{OQ'''} \text{ enz.}$$

Al deze quotiënten zijn voor die ene halfrechte gelijk aan één en hetzelfde getal dat we gemakshalve maar a noemen en bovendien is dit getal juist de tangens van de hoek α (we nemen aan dat de rudimenten van de goniometrie reeds aan de orde zijn geweest). Meteen valt dan het woord hellingshoek en hellingscoëffi-

ciënt. Deze terminologie lijkt me te verkiezen boven die van richtingshoek en richtingscoëfficiënt omdat het woord helling beter aansluit bij de tekening, meer aanspreekt en iets minder abstract is dan het begrip richting. Maar dit is een detailkwestie. Men zal vervolgens allicht andere halfrechten ten tonele voeren die steiler, respectievelijk minder steil zijn en laten zien dat dit van invloed is op de hellingscoëfficiënt en de hellingshoek. Resultaat: men heeft meteen de hellingscoëfficiënt gekoppeld aan de hellingshoek van de halfrechte en men kan de formule (liever dan vergelijking) lanceren:

$$\frac{y_p}{x_p} = \frac{y_{p'}}{x_{p'}} = \frac{y_{p''}}{x_{p''}} = \frac{y_{p'''}}{x_{p'''}} = \tan \alpha = a.$$

I.h.a. schrijven we dan hiervoor $\frac{y}{x} = a$ of liever $y = ax$. Dit geldt voor de x en

de y van welk punt P van de halfrechte dan ook. We noemen het de vergelijking van deze halfrechte. Ik hecht meer waarde aan het woord formule i.p.v. vergelijking omdat in dit stadium de leerlingen bij het woord vergelijking toch slechts nog denken aan één onbekende, terwijl het woord formule (ook uit de natuurkunde) voor hen meer een relatie tussen meer variabele dient te zijn. Maar ook dit is van secundair belang. Hoewel de meeste leerlingen ongetwijfeld niet wakker zullen liggen van de vraag of een punt waarvoor geldt $y = ax$ ook op deze halfrechte ligt, is het nu toch geschikt om te vragen waar een punt ligt met een $y > ax$ en waar het ligt als $y < ax$ (neem bij dit al een specifieke a). En waar zal dan het punt liggen met een $y = ax$? Genoeg van dit al.

Als men het eerste kwadrant verdeelt d.m.v. de bissectrice $y = x$ in de stukken met $a > 1$ en $a < 1$ en misschien nog enige aandacht schenkt aan de uitzonderlijke positie van de positieve x -as en de positieve y -as als randgevallen dan heeft men al een aardig inzicht gewekt in deze materie (hoe groter a hoe steiler de halfrechte, hoe kleiner hoe minder steil). Enig tekenen met rekenen zet het één en ander vast.

Dan laat men de halfrechte verlengen (spiegelen in O) en ziet dat toch $\frac{y}{x}$ weer gelijk aan a -is. Nu is dan de hele rechte ten tonele verschenen.

Om de rechte lijnen met negatieve hellingscoëfficiënten te krijgen gaan we spiegelen in de y -as (een activiteit uit de brugklas). Wat gebeurt er met een punt P als je het in de y -as spiegelt: zijn y blijft gelijk maar zijn x wordt veranderd in zijn tegengestelde. Dus voor de punten van de gespiegelde rechte geldt: $\frac{y}{-x} = a$ (misschien is het beter hier $\frac{y}{x} = -a$ te poneren).

We hebben dan het hele arsenaal van rechte lijnen door de oorsprong behandeld en het lijkt van belang al meteen de scheiding te lanceren van dalende en stijgende lijnen. Steevast zijn er leerlingen die dat (uiteeraard) flauwekul vinden, want $y = -2x$ is toch immers een stijgende lijn als je van rechts naar links loopt. Maar we lezen nog steeds van links naar rechts, dus daar houden we ons voorlopig dan maar aan.

Met het oog op straks is het nu van groot belang verband te leggen tussen de begrippen hellingscoëfficiënt en hellingsvector. Het begrip vector is de leerlin-

gen bekend uit de brugklas en wel i.v.m. translaties. Bovendien mogen we ervan uit gaan dat de leerlingen (dienen te) weten dat bij een translatie een rechte lijn als beeld weer een rechte lijn geeft die evenwijdig is met de oorspronkelijke. Welnu dan: transleer eens de rechte $y = 2x$ m.b.v. de vector

$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ enz., enz. en ook eens met

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ enz., enz.

Er zijn dus blijkbaar een heleboel vectoren die deze rechte lijn in zich zelf overvoeren en je ziet direct al of je met zo'n vector te maken hebt of niet als je O met die vector transleert. Zulke vectoren noemen we hellingsvectoren van deze lijn (ze geven immers juist de helling aan). Je kunt uit zo'n hellingsvector meteen de hellingscoëfficiënt halen door de y van die vector te delen door de x van die vector.

De nu volgende stap naar rechte lijnen met bouwschema $y = ax + b$ levert geen enkel probleem op. We schuiven gewoon de rechte $y = ax + b$ eenheden omhoog of omlaag. En dat twee lijnen met dezelfde a evenwijdig lopen ligt geheel in de lijn der verwachtingen. Hoe vindt een leerling nu de vergelijking (formule!) van een lijn met een gegeven hellingscoëfficiënt die ook nog door een gegeven punt moet gaan? Het algoritmische automatisme bestaande uit: schrijf maar alvast op $y = ax + b$ met de gegeven a en vul het gegeven punt in om de b te vinden zou ik liever pas iets later lanceren om eerst een wat explicietere handelwijze te laten uitvoeren. Begin met $y = ax$ (eventueel tekenen). Reken nu de y uit van het punt op deze rechte $y = ax$ dat reeds de goede x heeft (n.l. van het gegeven punt). Dan zie je hoeveel de rechte $y = ax$ omhoog of omlaag moet. Nu moeten de leerlingen nog de vergelijking kunnen vinden van een rechte door twee gegeven punten. Dit gebeurt dan het beste met het reeds eerder geïntroduceerde begrip hellingsvector. De rechte moet immers door de punten P en Q gaan. Welnu, dan is blijkbaar $\overrightarrow{PQ}$ een hellingsvector van de rechte. De hellingscoëfficiënt is dan ook bekend: de y gedeeld door de x van deze hellingsvector. Het probleem is dan teruggebracht tot het vorige.

Direct hiermee samenhangend kan worden behandeld het oplossen van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden zonder al te veel hocus pocus. Er is waarschijnlijk al terloops ter sprake gebracht dat, om breuken te vermijden, de vergelijking meestal beter in de vorm $cy = a'x + b'$ geschreven kan worden en zelfs meer algemeen in de gedaante $px + qy + r = 0$. Men late dan in het aller-eerste begin de leerling toch altijd nog eerst de twee vergelijkingen terugschrijven als $y = ax + b$. In het snijpunt is de y van de ene lijn gelijk aan de y van de andere. Dus we stellen de twee y 's aan elkaar gelijk. Hanteert men dit als grondvorm dan kan men daarna alle kanten uit (zo men al wil): eliminatie door aftrekken (y laten verdwijnen, maar waarom x niet ook eens) of door substitutie. De betekenis van al dit gewriemel is toch steeds weer terug te vinden in de (gedachte) grondvorm.

Raaklijnen aan tweedegraadskrommen in het havo-onderwijs

(een andere manier voor het bepalen van raaklijnen door punten op 'liggende' parabolen)

R. LEENTFAAR

De tweedegraadskrommen, die in de havo-wiskunde behandeld worden zijn de cirkel en de parabool. Voor wat de parabool betreft worden in het bijzonder slechts behandeld de exemplaren met hun symmetrie-as evenwijdig aan de y -as (gemakshalve staande parabolen genoemd) of de x -as (gemakshalve liggende parabolen genoemd).

Bij het opstellen van raaklijnen erdoor zijn te onderscheiden:

- I punten op de cirkel
- II punten buiten de cirkel
- III punten op de parabool (a: staand – b: liggend)
- IV punten 'buiten' de parabool

ad I:

- 1 Hier verdient de methode: raaklijn door raakpunt loodrecht op de straal verre de voorkeur.
- 2 Hoewel meer werk verschaffend, is ook het opstellen van een lijn door het raakpunt met willekeurige richtingscoëfficiënt (denk om 'vertikale' lijnen!) of willekeurige richtingsvector ($\vec{p}$) en het stellen van $D = 0$ wel acceptabel, omdat de leerling nog steeds beseft 'wat hij doet'.
- 3 De methode van de zgn. 'halve substitutie' of 'eerlijk delen' acht ik volstrekt verwerpelijk, omdat dit voor de meeste leerlingen een grote 'TRUC' is, terwijl hij of zij (zeker op den duur) absoluut niet meer weet, waar men mee bezig is. Ik behandel deze methode dan ook konsekvent niet in mijn lessen.

ad II:

Hier past alleen de methode van I-2.

ad III:

- 1 Eerlijk delen (I-3) blijft verwerpelijk.
- 2 De methode van I-2 is wat bewerkelijk, maar op zich goed bruikbaar.
- 3 De voorkeur verdient de methode met gebruikmaking van het differentiëren, temeer daar op deze wijze (weer) de meetkunde en de algebra geïntegreerd worden.

Voorbeeld:

bepaal de raaklijn in $(5, -6)$ aan de grafiek van $(y + 2) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2$

Oplossing:

De kromme is $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4} \Rightarrow$

$y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, dus $y'(5) = -2$.

De raaklijn heeft richtingscoëfficiënt -2 en dus de vorm $y = -2x + c$, gaat bovendien door $(5, -6) \Rightarrow c = +4$: de gezochte raaklijn is dus $y = -2x + 4$. (Uit het voorafgaande begrijpt u, dat ik ook de formule $y - b = m(x - a)$ voor de lijn door (a, b) met richtingscoëfficiënt m in mijn lessen NIET behandel.)

ad IIIb:

- 1 Eerlijk delen is nog even verwerpelijk.
- 2 De methode van I-2 is ook hier goed bruikbaar, maar wel bewerkelijk.
- 3 Moderne Wiskunde deel 8h doet het als volgt (differentiëren met de kettingregel):

Voorbeeld:

bepaal de raaklijn in $(-2, 1)$ aan de grafiek van $(x - 2) = -\frac{1}{4}(y + 3)^2$

Oplossing:

De kromme is $(y + 3)^2 = -4x + 8 \Leftrightarrow y = -3 \pm \sqrt{(-4x + 8)}$.

Wegens $(-2, 1)$ geldt het = plusteken, dus $f(x) = -3 + \sqrt{(-4x + 8)}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(-4x + 8)}} \cdot (-4) = \frac{-1}{\sqrt{(-x + 2)}} \Rightarrow f'(-2) = -\frac{1}{2}. \quad \text{De raaklijn}$$

heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ en dus de vorm $y = -\frac{1}{2}x + c$ en gaat bovendien door $(-2, 1) \Rightarrow c = 0$. De raaklijn is dus $y = -\frac{1}{2}x$.

Nadelen van deze methode acht ik:

- a het moeten opsplitsen van de relatie in 2 functies, waaruit dan de juiste gekozen moet worden.
- b Gebruik van de kettingregel, die voor veel leerlingen moeilijkheden geeft, en die door mij zoveel mogelijk vermeden wordt.
- 4 Daarom heb ik de volgende methode ontwikkeld, die m.i. de voorkeur verdient, en die de enige reden was tot het schrijven van dit artikel (zie hetzelfde *voorbeeld* als bij IIIb-3):

Oplossing:

- (i) de parabool spiegelen in $y = x$: $(y - 2) = -\frac{1}{4}(x + 3)^2$ - het (beeld-) raakpunt is $(1, -2)$
- (ii) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} \Rightarrow y'(1) = -2$. De (beeld-) raaklijn is dus $y = -2x + c$ en gaat door $(1, -2) \Rightarrow c = 0$. Het beeld van de gezochte raaklijn is dus $y = -2x$ met als (beeld-) raakpunt $(1, -2)$
- (iii) 'Terug'-spiegelen in $y = x$ geeft de originele parabool weer terug met als raakpunt $(-2, 1)$ en als (gezochte) raaklijn $x = -2y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$

Voordeel van deze methode is, dat de leerling van stap tot stap begrijpt, wat hij doet, en bovendien wordt hier gebruik gemaakt van een niet-gezochte

afbeelding (spiegelen in $y = x$), wat nuttig is i.v.m. het belang, dat aan (meetkundige en algebraïsche) afbeeldingen gehecht wordt. Bovendien is deze methode toepasbaar OOK als de kettingregel nog niet behandeld is. En dat was mijn praktische probleem, daar ik de hoofdstukken van Moderne Wiskunde deel 8h niet in de 'juiste' volgorde behandeld had!

ad IV:

Ook hier past alleen de methode van I-2.

Naschrift: Mijn collega, mevrouw J. Verhage, maakte mij erop attent, dat er ook bij toepassing van de 'juiste' volgorde van Moderne Wiskunde deel 8h iets niet klopt. Immers in hoofdstuk 3 wordt de kettingregel al gebruikt voor de methode genoemd onder IIIb-3, terwijl de kettingregel pas in hoofdstuk 4 besproken wordt!

Over de auteur:

Geboren in 1944. Na een voltooide hbs-b opleiding wiskunde gestudeerd aan de T.H.-Delft. In febr. 1968 afgestudeerd als wiskundig ingenieur op een onderwerp over programmeertalen. Als leraar wiskunde het eerste halfjaar van 1968 verbonden geweest aan het Gemeentelijk Lyceum te Doetinchem. Daarna tot op heden als leraar wiskunde verbonden aan de Chr. Scholen Gemeenschap 'Johannes Calvijn' te Rotterdam-Zuid. Geeft aldaar sinds september 1973 ook lessen in de informatica (computerkunde), sedert eind 1975 m.b.v. een eigen mini-computersysteem. Gaf verder van 1972-1975 lessen wiskunde aan de Rotterdamse Avond Scholen Gemeenschap.

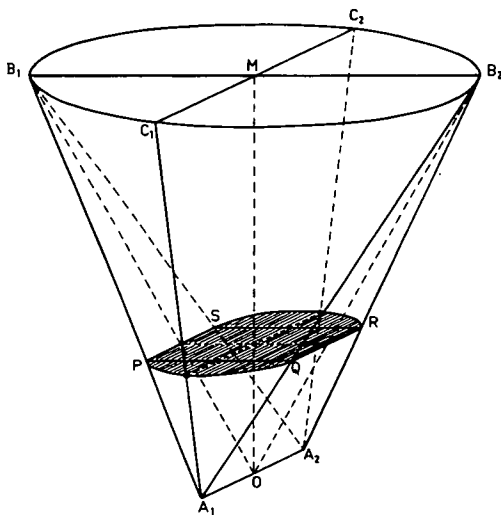
Het koffiefilter als prismoïde

O. BOTTEMA

1 Het filter (je mag ook *de* zeggen) is volgens het woordenboek 'een toestel om vloeistoffen te zuiveren door middel van doorzijing'. Een gebruikelijk type is tegenwoordig het wegwerpvoorwerp dat dienst doet bij het zetten van koffie. In neergeslagen toestand is het weinig inspirerend, maar als men het operationeel maakt ontstaat een stereometrische figuur van curieuze gedaante. *Praxis der Mathematik* wijdde er onlangs een artikel aan¹⁾, waaruit bleek dat men de inhoud van het bewuste lichaam langs elementaire weg kan bepalen.

In de volgende regels – die kunnen gelden als het zoveelste bewijs voor de maatschappelijke betekenis van de wiskunde – wordt aangetoond dat ook de hoeveelheid vloeistof in het vat, als dit tot een gegeven hoogte gevuld is, met een eenvoudige methode kan worden berekend. Tenslotte wordt het filter herkend als te behoren tot de orde der *prismoïden*.

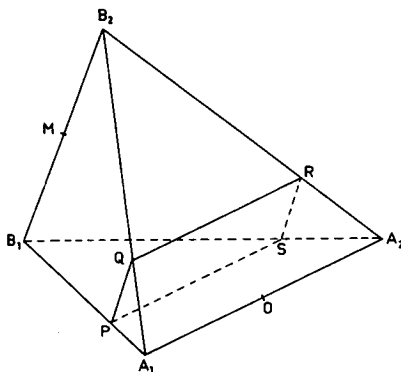
2 Het lichaam ziet er als volgt uit. Het 'grondvlak' is de horizontaal geplaatste scherpe kant A_1A_2 , met midden O en lengte s . De bovenrand wordt gevormd door de cirkel in een horizontaal vlak, met middelpunt M en straal r ; MO staat vertikaal en de lengte van MO is h . B_1B_2 is de middellijn van de cirkel loodrecht op A_1A_2 ; C_1C_2 is de middellijn evenwijdig met A_1A_2 . (fig. 1) Zonder het uit-



Figuur 1

drukkelijk aan te kondigen vat *Haeberlen* de mantel op als bestaande uit de driehoeken $A_1A_2B_1$ en $A_1A_2B_2$ en verder uit twee kegelmantels, de ene met top A_1 en als grondlijn de cirkelboog $B_1C_1B_2$, de ander met top A_2 en de grondlijn $B_2C_2B_1$. Dit lijkt ons van het filter een aanvaardbare styling. Het lichaam bestaat derhalve uit het viervlak $A_1A_2B_1B_2$ en twee halve scheve cirkelkegels.

3 Zij U het horizontale vlak op de afstand x boven A_1A_2 ($0 \leq x \leq h$); het snijdt A_1B_1 , A_1B_2 , A_2B_2 en A_2B_1 opvolgend in P, Q, R, S . De volledige doorsnede bestaat uit de rechthoek $PQRS$ en twee halve cirkels met middellijn PQ , resp. RS . Daarbij is $PQ = RS = 2xr/h$ en $PS = QR = (h - x)s/h$. Het gedeelte beneden U bestaat uit twee halve kegels en het afgeknotten prisma $A_1PQ \cdot A_2RS$. De oppervlakte van het grondvlak van elk der halve kegels is $\pi x^2 r^2 / 2h^2$, de hoogte is x en de inhoud dus $\pi x^3 r^2 / 6h^2$. Het afgeknotten prisma (fig. 2) heeft het



Figuur 2

vlak OB_1B_2 tot symmetrievlak. De oppervlakte van driehoek OB_1B_2 is rh en die van de rechte doorsnede van het prisma dus $x^2 r / h$. De inhoud van het afgeknotten prisma is volgens een bekende stereometrische formule

$$\begin{aligned} & x^2 r / h \cdot \frac{1}{3} (A_1A_2 + PS + QR) \\ &= x^2 r / h \cdot \frac{1}{3} \{s + 2(h - x)s/h\} = \frac{1}{3} r s x^2 (3h - 2x) / h^2. \end{aligned}$$

Wij krijgen dus: *Voor het volume van de vloeistof in het filter, als het tot de hoogte x gevuld is, geldt:*

$$V(x) = \frac{1}{3} r x^2 \{ \pi r - 2s \} x + 3sh \} / h^2. \quad 3.1$$

De totale inhoud wordt:

$$V(h) = \frac{1}{3} rh(\pi r + s), \quad 3.2$$

in overeenstemming met het door *Haeberlen* afgeleide resultaat.

4 Het gegeven meetkundige bewijs kan men ook gedeeltelijk door een analytische redenering vervangen. De doorsnede met U bestaat uit de rechthoek $PQRS$ en twee aansluitende halve cirkels. De oppervlakte is dus

$$\begin{aligned}
 D(x) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 x^2 / h^2 + 2rsx(h-x)/h^2 \\
 &= r\{(\pi r - 2s)x^2 + 2shx\}/h^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Daaruit volgt:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \int_0^x D(u) du = \frac{r}{h^2} \left[\frac{1}{3} (\pi r - 2s) u^3 + shu^2 \right]_0^x \\
 &= \frac{r}{h^2} \left\{ \frac{1}{3} (\pi r - 2s) x^3 + shx^2 \right\},
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

wat met (3.1) overeenstemt.

5 In de elementaire stereometrie pleegt men een *prismoïde* te definiëren als een veelvlak waarvan alle hoekpunten in twee evenwijdige vlakken W_1 en W_2 liggen. Zo'n lichaam wordt begrensd door twee willekeurige veelhoeken, in W_1 en in W_2 , en verder door een krans van driehoeken, telkens met een hoekpunt in één der vlakken en twee in het andere. (De 'veelhoek' kan wel een lijnstuk zijn, of zelfs tot een enkel punt verschrompeld). Door in de opstaande zijvlakken genoeg geschikte lijnen te trekken, kan men de gehele mantel opvullen met lijnstukken die elk een punt van W_1 met een punt van W_2 verbinden. Deze eigenschap wordt gebruikt om de *algemene prismoïde* te definiëren.

In W_1 resp. W_2 worden willekeurige gesloten krommen k_1 , resp. k_2 aangenomen en de mantel wordt gevormd door een continue verzameling rechten, die elk een punt van k_1 met een punt van k_2 verbinden. Daarmee worden ook lichamen met een gekromde mantel, zoals (afgeknotte) kegels bij de categorie der prismoïden ingelijfd. Een minder elementair voorbeeld is de figuur die ontstaat door één der regelscharen op een hyperboloïde met twee evenwijdige vlakken te snijden. De algemene prismoïde wordt in oudere leerboeken der stereometrie behandeld; o.a. met vele voorbeelden – tot vermoeiens toe – door *Holzmüller*.²⁾

Het is nu duidelijk dat het koffiefilter een prismoïde is. De krommen k_i in grond- en bovenvlak zijn resp. het lijnstuk A_1A_2 en de cirkel $(M; r)$. De rechten op de mantel zijn: de beschrijvende van de twee halve kegels en de rechten van B_1 en van B_2 naar de punten van A_1A_2 .

Brengt men in een prismoïde een vlak U aan op afstand x evenwijdig met W_1 dan heeft het snijpunt van U met een rechte op de mantel coördinaten, die *lineaire functies* van x zijn. Daaruit volgt, na enig overleg, de voor een prismoïde karakteristieke eigenschap: *de oppervlakte van de doorsnede op hoogte x is een kwadratische functie van x* . Voor ons filter wordt dit door (3.1) bevestigd.

6 Is algemeen

$$D(x) = Ax^2 + Bx + C, \tag{6.1}$$

dan is

$$V(h) = \int_0^h D(x)dx = \frac{1}{3}Ah^3 + \frac{1}{2}Bh^2 + Ch, \quad 6.2$$

wat wegens

$$D(0) = G_1 = C, D(h/2) = M = \frac{1}{4}Ah^2 + \frac{1}{2}Bh + C, D(h) = G_2$$

geschreven kan worden als

$$V(h) = \frac{1}{6}h(G_1 + 4M + G_2), \quad 6.3$$

dat is de quadratuur-formule van *Simpson*.

De uitdrukking (6.3) is voor de inhoud van de 'gewone' prismoïde welbekend.³⁾ Wij weten nu dat zij ook voor ons filter geldt.

7 Een onzer relaties heeft de moeite genomen de inhoudsformule (3.2) te controleren aan de hand van een werkelijk koffiefilter. Voor zijn exemplaar gold $h = 11$ cm, $r = 6$ cm, $s = 5,2$ cm, waaruit een theoretisch volume van 528 cm^3 volgt; dit bleek in goede overeenstemming te zijn met de door een maatglas bepaalde inhoud.

Noten:

- 1 F. Haeberlen, *Koffiefilter-Geometrie*, P.M. 21 (1979), 108-109.
- 2 G. Holzmüller, *Elemente der Stereometrie II* (1900), 268-291.
- 3 E. Rouché et Ch. de Comberousse, *Traité de Géométrie*, II. (1931), 88-90; P. Molenbroek, *Leerboek der Stereometrie*, 11e druk (1949), 169-170.

De rol van voorstellingen en materiële handelingen bij wiskunde-onderwijs aan een blinde leerling

AD VAN DE VEN

Inleiding

Marianne is 15 jaar en leerlinge van de derde klas van het gymnasium. Op zich zijn dit geen opzienbarende mededelingen, ware het niet dat zij visueel gehandicapt is: zij is al $14\frac{1}{2}$ jaar blind. Met deze handicap heeft zij nu ruim $2\frac{1}{2}$ jaar de lessen wiskunde gevolgd. Omdat wel bekend is dat wiskunde één van de moeilijkere vakken is voor een blinde, krijgt Marianne iedere week een steunles wiskunde. Mede dank zij deze steunlessen kan zij de wiskundelessen in het algemeen goed volgen en behaalt zij goede resultaten.

Onlangs heb ik één van de steunlessen, met als onderwerp: inleiding in de goniometrie, opgenomen en geanalyseerd. Uit de analyse van het gesprek bleek dat Marianne soms moeite heeft met het eigen maken van bepaalde wiskundige begrippen en operaties. Op het tot stand komen van deze begrippen en operaties en op de daarmee samenhangende voorstellingen en handelingen wil ik in dit artikel wat nader ingaan. Ik kies daarbij voor een theoretisch kader dat gebaseerd is op de onderwijsleertheorie zoals die geformuleerd is door een belangrijke stroming in de Russische leerpsychologie: de theorie van de trapsgewijze vorming van mentale handelingen van Gal'perin¹). Ik kies voor dit model, omdat een wetenschappelijk systeem als de wiskunde zich bij uitstek leent als toepassingsgebied van deze theorie, zoals o.a. Davydov²) heeft aangetoond.

In dit artikel beperk ik me tot de rol die voorstellingen en materiële handelingen spelen bij het tot stand komen van mentale handelingen. Voor een uiteenzetting van de verbale, uitwendig gesproken fase en de fase van het uitwendig spreken voor zichzelf verwijs ik naar het onlangs in Euclides verschenen artikel van Sieb Kemme³).

Voorstellingen en handelingen

Handeling is een kernbegrip binnen de leertheorie van Gal'perin. Volgens Gal'perin gaat het bij een handeling om een doelgerichte verandering van bepaalde objecten: uit bepaalde omgangsobjecten kan een nieuw object ontstaan. Centraal daarbij staat dus het omgaan met de objecten. Deze objecten kunnen van materiële aard zijn (concrete voorwerpen), ze kunnen gemateriali-

seerd zijn (bv. tekeningen, schema's, foto's) en ze kunnen mentaal zijn (begripen, voorstellingen).

Als de objecten concrete, waarneembare dingen zijn, waarmee omgegaan wordt en wanneer er uitwendig waarneembaar ingegrepen wordt in die dingen dan spreekt Gal'perin van een materiële of gematerialiseerde handeling. Als de handeling zich innerlijk voltrekt en het object één of meer voorstellingen of begripen omvat dan spreekt hij van een mentale handeling. Tot de mentale handelingen in de wiskunde kunnen we bv. rekenen: het optellen van getallen, het berekenen van oppervlakten, spiegelen in een lijn. Door de mentale handeling is een leerling in staat het concrete te overschrijden en zich te oriënteren op het oplossen van problemen.

Volgens Talyzina⁴⁾ bestaat er een nauwe relatie tussen handelingen en voorstellingen. Zo is de handeling een middel om tot ontwikkeling van voorstellingen te komen, zal voor reproductie van een voorstelling altijd het uitvoeren van een handeling nodig zijn en wordt een voorstelling tijdens het oplossen van opgaven gebruikt door deze in de betreffende mentale handeling op te nemen.

Het mentale handelen is dus afhankelijk van voorstellingen die de leerling verworven heeft. Om te kunnen optellen zal een leerling een goed begrip (een goede voorstelling) moeten hebben van getallen en zal hij de mentale operatie optellen moeten beheersen.

Een eerste probleem

Bovenstaande uitwijding over voorstellingen en handelingen is nodig om een goed beeld te krijgen van een eerste probleem dat zich voordoet bij het wiskunde-onderwijs aan een blinde leerling. We kunnen namelijk aannemen dat een blinde wel voorstellingen heeft van allerlei dingen, maar vanwege de handicap zal de wijze van verwerven van deze voorstellingen én de aard van de verworven voorstellingen afwijken van die van een niet-blinde.

Een blinde heeft leren handelen en waarnemen op basis van andere zintuigen dan zijn gezicht en heeft zijn kennis van de hem omringende wereld met deze andere zintuigen verworven, d.w.z. voorstellingen opgebouwd. Het verschil in verwerven van voorstellingen komt duidelijk tot uiting bij meetkundige onderwerpen in de wiskundeles. Dit blijkt bv. in het volgende fragment van het opgenomen gesprek:

– als je een cirkel zou moeten omschrijven qua vorm, wat zou je dan zeggen?

M: gewoon rond

– wat betekent precies 'rond'?

M: net als bv. de bovenkant van een kopje.

Iedere niet-blinde zal de bovenkant van een kopje weliswaar de vorm van een cirkel toeschrijven, maar als er om een voorbeeld gevraagd wordt, zal zelden het kopje genoemd worden. Het noemen van het kopje als voorbeeld zal zeker samenhangen met het ontstaan van de voorstelling op basis van voelen met de handen.

De aard van de voorstellingen van blinden zal in het algemeen anders zijn. Zo is bij mensen die blind geboren zijn en later hun gezichtsvermogen kregen, gebleken dat zij vormen die zij op basis van voelen hadden leren onderscheiden (bv. vierkant, kubus) niet op basis van hun pas verworven gezichtsvermogen konden onderscheiden⁵).

Niet altijd komt het verschil van de aard van de voorstellingen tot uiting in gesprekken met blinden, omdat zij hun taalgebruik zeer goed hebben aangepast aan dat van zienden. Het volgende fragment geeft een voorbeeld van het nauwkeurige en herkenbare taalgebruik:

- weet je nog waarmee we de eerste les over goniometrie begonnen zijn?
- M: met de kwadranten; het eerste kwadrant, het tweede kwadrant, dan het derde kwadrant ...
- hoe zie jij die kwadranten?
- M: ik zie een vlak voor me en midden over dat vlak loopt een lijn naar boven, dus vertikaal, die verdeelt het vlak in twee helften; horizontaal loopt er ook nog een lijn; deze verdeelt dan het papier in vier vlakken, vier gelijke delen.
- hoe noem je die lijnen?
- M: de laatste lijn noem je de x -as en de verticale lijn de y -as. Rechts boven de x -as en rechts van de y -as ligt dan het eerste kwadrant.

Hoewel bij het wetenschappelijk systeem van de wiskunde de aard van de voorstellingen en de wijze van verwerven van voorstellingen niet van essentieel belang is, kunnen de verschillen op dit gebied bij de conversatie in de les herhaaldelijk leiden tot misverstanden tussen leraar en leerling.

Problemen treden op als leraar en leerling denken over een zelfde wiskundig begrip te spreken, terwijl er in werkelijkheid een verschil in interpretatie is. Zo'n begripsverwarring deed zich voor bij het afleiden van de eigenschap $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$. Uit het volgende citaat blijkt wel waar het misverstand optreedt:

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; hoe bewijs je dat?
- M: dat weet ik niet
- dat kun je (net als $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$) bewijzen met spiegelen: spiegelen in de lijn $y = x$, de deellijn van hoek XOY ; neem eens een punt $(1, 2)$, dit spiegelen we in de lijn $y = x$; wat wordt dan het beeldpunt?
- M: eh ...
- hoe zie je dat?
- M: ... $(1, 1)$, daar loopt de bissectrice door, dan moet je dus eigenlijk puntspiegelen in $(1, 1)$; zo doe ik het dan; en dan komt er $(1, 0)$ uit, maar ik weet niet of het goed is.
- nee, dat lijkt me niet goed te zijn
- M: mij ook niet, maar ik weet niet precies hoe ik het moet doen.
- neem nou eens het punt $(3, 0)$ en spiegel dat in $y = x$, wat is dan het beeldpunt?
- M: ik dacht $(3, 6)$

– hoe zie jij spiegelen eigenlijk?

M: ik neem in mijn gedachten een soort liniaal, ik weet niet of je dat dan schuin moet doen of recht

– het moet recht

M: dan leg je de liniaal gewoon van (3, 0) naar het punt op de bissectrice

– loodrecht, waar kom je dan terecht?

M: bij (3, 6)

– wat bedoel jij met loodrecht?

M: dan moet de hoek 90° zijn

– komt dan (3, 0) op (3, 6) terecht, als de hoek 90° is tussen liniaal en bissectrice?

M: nee, maar ik weet niet hoe het anders moet .

Uit dit citaat blijkt niet alleen dat er een interpretatieverschil bestaat ten aanzien van de begrippen recht en schuin, maar ook dat Marianne de mentale operatie (loodrecht) spiegelen in een lijn niet of niet volledig beheerst. De fout die zij hier maakt komt nog al eens voor bij leerlingen van de brugklas, maar in de derde klas van het gymnasium ben ik zo'n vergissing nog niet eerder tegengekomen.

Materiële en gematerialiseerde handelingen

Hoe komt het nu dat Marianne zo'n moeite heeft met de mentale operatie spiegelen in de lijn $y = x$? Zij heeft, net als de andere leerlingen in het verleden regelmatig met spiegelen in een lijn te maken gehad; toch kan zij de mentale handeling niet snel voor haar geest halen. Om dit te verduidelijken gaan we nader in op de rol van de materiële handelingen bij het vormen van mentale handelingen.

Gal'perin is van mening dat een nieuwe mentale handeling niet geleerd kan worden op grond van informatie over die handeling alleen, men moet ze leren door uit te voeren en wel eerst op materieel of gematerialiseerd nivo. Handelen op materieel nivo heeft betrekking op het concreet manipuleren met materialen; gematerialiseerd handelen heeft betrekking op het werken met tekeningen, grafieken, modellen en schema's.

Het is, volgens Gal'perin, gemakkelijker en ook natuurlijker een materiële handeling in alle uitvoerigheid te verrichten dan dit te doen bij een mentale handeling; door met het 'materiaal' om te gaan ontdekken leerlingen inhoud, structuur én verloop van de handeling en maken deze zo eigen tot een mentale handeling. De materiële handeling is concreet, geeft de leerling houvast en verloopt nog niet geautomatiseerd.

Talyzina meent zelfs dat het onmogelijk is een nieuwe mentale handeling volwaardig te leren zonder een goed materieel of gematerialiseerd handelingsnivo. Het ontbreken van zo'n basis leidt slechts tot formalisme en verbalisme.

Een tweede probleem

Hiermee komen we tot het tweede didactische probleem bij het wiskunde-onderwijs aan een blinde. In de wiskundeles zal, vooral bij meetkundige onderwerpen, veelvuldig gebruik gemaakt worden van tekeningen. De leerlingen zullen aan de hand van tekeningen in het boek of op het bord bepaalde begrippen en regels moeten leren eigen maken. Verder zullen zij vaak zelf tekeningen moeten maken: zo zal de docent de leerlingen het spiegelen in een lijn laten uitvoeren voor een aantal punten om vervolgens het algemene principe af te leiden. Anders gezegd: de leerlingen zijn vaak op gematerialiseerd handelings-nivo bezig tijdens de wiskundeles.

Zelf tekeningen maken levert echter voor een blinde leerling enkele problemen op: hij kan wel tekeningen maken op een speciaal daarvoor gemaakt bord, maar het tekenen neemt veel tijd in beslag. Verder heeft een blinde leerling moeite om de tekening 'terug' te lezen, en kan zich dus niet zo gemakkelijk corrigeren. Het in tekening brengen van driedimensionale figuren is voor een blinde vrijwel onmogelijk.

Het lezen van een tekening levert voor de blinde leerling weer andere problemen op: omdat hij aangewezen is op tactiele waarneming, zal hij een kleiner gebied ineens bestrijken en in zich opnemen, m.a.w. het simultane bereik van een blinde is kleiner dan dat van een niet-blinde. Verder komt het beeld via tactiele waarneming langzamer tot stand; handen hebben immers meer tijd nodig om een bepaald gebied te bestrijken dan ogen. Tenslotte zal tactiele waarneming van een tekening mogelijk minder gedetailleerd van aard zijn.

Een mogelijke oplossing van dit didactische probleem is te vinden in het aanbieden van meer materiële i.p.v. gematerialiseerde modellen en voorwerpen. Onbewust hebben we dit toegepast tijdens het gesprek met Marianne over het afleiden van de eigenschap $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$:

- pak eens een geodriehoek, leg deze met een rechthoekszijde tegen de lijn $y = x$, dan schuiven we langs deze lijn tot de andere rechthoekszijde door $(3, 0)$ gaat; dan klappen we de geodriehoek om; kun je voorstellen wat we doen?

M: nee

- nou, hier: dit is een geodriehoek, dit (de onderkant van het boek) stelt de x -as voor en de zijkant (van het boek) de y -as (lr. legt de geodriehoek met de schuine zijde tegen de onderzijde van het boek). Nou gaan we omklappen (M. klapt de driehoek om); langs welke lijn komt nu de schuine zijde (van de driehoek)?

M: langs de y -as

- wat wordt dan het beeld van $(3, 0)$?

M: even denken ...: $(0, 3)$

- heb je het nu begrepen?

M: ja

- neem nou weer eens $(1, 2)$, wat is het beeldpunt?

M: nou ... eh ...

- ligt $(1, 2)$ onder of boven de lijn $y = x$?

M: er boven

– en het beeld?

M: eronder: het is dan (2, 1)

– waarom (2, 1)?

M: omdat de coördinaten omkeren

– waarom moet je ze omkeren?

M: omdat het anders niet uitkomt, we hebben het net zo uitgerekend, dus nou klopt het

– maar net hadden we een bijzonder punt ...

M: een punt van de x -as

– stel je nu eens voor dat je een rechthoekig driehoekje tekent tegen de y -as aan; met rechthoekszijde 2 langs de y -as, schuine zijde van 0 naar (1, 2).

Dit driehoekje spiegelen we in $y = x$; waar komt dat dan te liggen?

M: op de x -as

– de rechthoekszijde met lengte 2 komt dan langs ...

M: op de x -as te liggen

– en 1 van de y -as vandaan ...

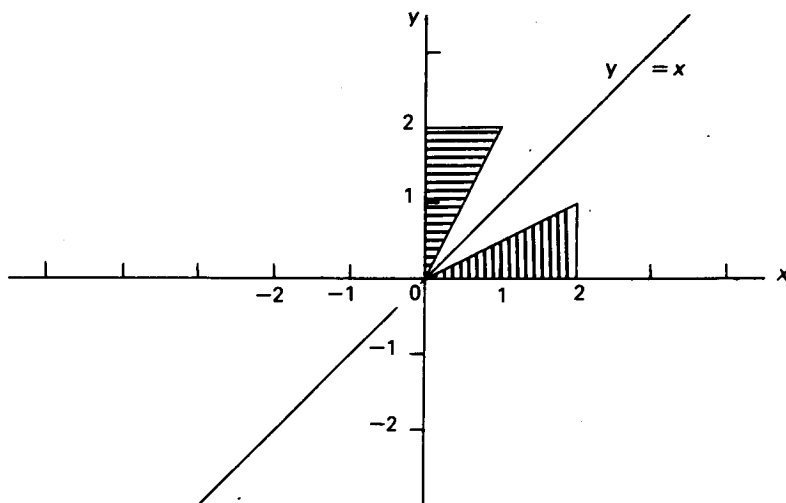
M: komt 1 boven de x -as

– dan doe je eigenlijk hetzelfde als ...

M: net met de geodriehoek

– een punt (x, y) heeft als beeldpunt bij spiegelen in $y = x$ dus ...

M: de coördinaten (y, x)



Enkele opmerkingen

Uit de analyse van één gesprek met één leerling kunnen onmogelijk verantwoorde algemene conclusies getrokken worden. Toch waag ik het enkele opmerkingen te maken die uitgangspunt kunnen zijn voor nader onderzoek van de problemen die optreden bij wiskunde-onderwijs aan blinden.

- 1 De problemen die een blinde leerling ondervindt bij het vak wiskunde op school zijn niet van wiskundige aard maar didactisch en psychologisch. De didactische problemen hebben vooral betrekking op het voor een blinde op de juiste wijze opzetten van een onderwijsprogramma. We zullen niet kunnen volstaan met een overzicht te geven van de te leren leerstof, maar we zullen moeten aangeven welke leermaterialen voor blinde leerlingen nodig zijn om te komen tot voorstellingen, begrippen en mentale operaties die tot de wiskunde behoren. Leerpsychologisch is het belangrijk een aangepaste karakterisering te geven van de handelingen met behulp waarvan de leerling de eigenschappen van de dingen kan onderscheiden en eigen maken. De psychologische problemen hebben te maken met het vormen van voorstellingen en operaties. Het verwervingsproces is anders van aard en duurt langer; waarschijnlijk zal een eenmaal verworven voorstelling of operatie beter beklijven.
- 2 De problemen die een blinde leerling ondervindt bij het vak wiskunde zijn van tijdelijke aard. Naarmate de leerling verder gevorderd is met de wiskunde zullen concrete voorstellingen en tekeningen een minder grote rol gaan spelen en zal het formele en verbale (een gebied waarop blinde leerlingen vaak verbluffend goed zijn) gaan overheersen.

Verder onderzoek naar problemen van blinde leerlingen bij het vak wiskunde draagt bij tot verheldering van problemen die in het algemeen kunnen optreden bij het wiskunde-onderwijs. Met name leerlingen die moeite hebben met het vak wiskunde kunnen hiervan profiteren!

Noten:

- 1 Voor een uitvoerige uiteenzetting van Gal'perins theorie van de vorming van mentale handelingen zie: C. F. van Parreren en J. A. M. Carpay: *Sovjetpsychologen aan het woord*, Groningen 1972.
- 2 Zie: C.F. van Parreren en J. M. C. Nelissen: *Met Oosteuropese psychologen in gesprek*, Groningen 1979, pag. 110-120.
- 3 Zie: Sieb Kemme: *Functionele en formele taal*, in *Euclides*, jaargang 55, no 7 (1980).
- 4 Zie: Talyzina: *De theorie van de trapsgewijze vorming van mentale handelingen*, in *Handboek voor de onderwijspraktijk*, aflevering jan. 1980.
- 5 Zie: Antti Eskola: *Sociale psychologie*, Rotterdam 1976, pag. 41-42.

Over de auteur:

Ad van de Ven studeerde wiskunde m.o. en pedagogiek m.o. (specialisatie onderwijskunde) aan de Katholieke Leergangen te Tilburg. Hij is sinds 1967 als leraar wiskunde en sinds enkele jaren ook als onderwijskundige verbonden aan het mgr. Zwijscencollege te Veghel.

Korrel

Notaties voor implicatie en inferentie

In de gebruikelijke logica, waarin elke bewering òf waar òf niet-waar is, definieert men het implicatieteken ' $\Rightarrow$ ' als volgt:

Als a en b beweringen zijn, dan is $a \Rightarrow b$ de bewering die waar is behalve wanneer a waar en b niet waar is: $a \Rightarrow b$ is een kortere schrijfwijze voor $(\neg a) \vee b$ (niet- a of b), de disjunctie van b en van de negatie van a .

Onderstaande waarheidstafel moge dit verduidelijken:

a	b	$a \Rightarrow b$
W	W	W
W	N	N
N	W	W
N	N	W

In 'Sigma' en wellicht ook in andere schoolboeken wordt de implicatie wel goed gedefinieerd, maar vervolgens wordt het teken ' $\Rightarrow$ ' vaak in een andere betekenis gebruikt, namelijk als inferentieteken. Hiervoor is men in het Franse onderwijs gewoon het teken $\vdash$ te gebruiken. Het lijkt mij nuttig dat ook in het Nederlandse onderwijs in te voeren. Misschien hebben sommige schrijvers dat al gedaan.

Immers $a \Rightarrow b$ betekent: 'Als a , dan b ', preciezer: 'Als a niet waar is, dan is b waar of niet waar, en als a waar is, dan is b waar.' Maar $a \vdash b$ betekent: ' a , dus b ', duidelijker: ' a is waar, dus b is waar'; $a \vdash b$ vat de volgende redenering samen:

a a is een ware bewering
 $a \Rightarrow b$ 'als a waar is, dan is b waar' is een ware bewering

—

b dus b is een ware bewering.

Laten wij in een formeel bewijs $a \vdash b \vdash c$ schrijven om uit te drukken: Uit a volgt b en uit b volgt c , dus uit a volgt c . (De gebruikte stellingen zijn $a \Rightarrow b$ en $b \Rightarrow c$, en de conclusie is $a \Rightarrow c$.) De notatie $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ suggereert namelijk een bewering en niet een redenering.

A. M. Mijnlief

Opgaven

427. Voor welke gehele positieve getallen a en b geldt

$$a^2 + ab + b^2 = 1981^2?$$

Als u deze getallen gevonden hebt, leid dan daaruit af voor welke gehele positieve getallen geldt

$$a^2 - ab + b^2 = 1981^2$$

Hiermee wenst de heer B. Kootstra de lezers van Euclides een goed 1981.

Als persoonlijke wens wil ik eraan toevoegen, dat ik hoop dat de rest van 1981 voor u gemakkelijker zal zijn dan dit moeizame begin.

428. In de onderstaande opgave stellen a en b verschillende cijfers voor. Deze cijfers komen op de plaats van de stippen niet voor. Gevraagd de uitkomst van de vermenigvuldiging.

$$\begin{array}{r} \dots ab \\ \quad bab \\ \hline \dots ab\dots \\ \quad \dots ba \\ \quad \dots ab\dots \\ \hline \dots b\dots b\dots \end{array} \times$$

(J. N. Scholder, Edam)

Oplossingen

425. Een dokter houdt elke ochtend spreekuur van 8 tot 10. Hij roept 12 patiënten op om de 10 minuten, in willekeurige volgorde. Hiervan vereisen 6 een behandelingstijd van 9 en 6 van 11 minuten. Hoeveel minuten loopt zijn spreekuur gemiddeld uit?

We stellen de procedure voor in een rooster. Van elk spreekuur maken we een grafiek. We beginnen in de oorsprong. Vereist een patiënt 9 minuten, dan gaan we 1 naar boven, 11 minuten dan 1 naar rechts. We eindigen dus in (6, 6).

Het spreekuur loopt uit, als het aantal patiënten behandeld is met 9 minuten behandeltijd op een of ander moment dat met behandeltijd 11 minuten overschrijdt. Is deze overschrijding maximaal i minuten, dan loopt het spreekuur i minuten uit.

Dus:

als de grafiek met de lijn $y = x + i$ een punt gemeen heeft, maar geen punt met de lijn $y = x + i + 1$, dan loopt het spreekuur i minuten uit.

Noem het aantal grafieken dat met de lijn $y = x + i$ een punt gemeen heeft, p_i . De som van alle tijdsoverschrijdingen is dan

$$1(p_1 - p_2) + 2(p_2 - p_3) + \dots + 5(p_5 - p_6) + 6p_6 = p_1 + p_2 + \dots + p_6.$$

We gaan p_i uitrekenen. Neem een grafiek die met de lijn $y = x + i$ een punt gemeen heeft. Noem het eerste gemeenschappelijke punt P . Spiegel het deel OP van deze grafiek in de lijn $y = x + i$.

We krijgen dan een grafiek die loopt van $(-i, i)$ naar (6, 6). Zie figuur op blz. 154.

Het aantal grafieken dat van $(-i, i)$ loopt naar (6, 6) is $\binom{6+i}{i}$. Dit aantal is gelijk aan p_i .

Alle mogelijke grafieken samen geven dus een tijdsoverschrijding (in minuten)

$$\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \dots + \binom{12}{5}$$

Gemiddeld is de tijdsoverschrijding

$$(\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \dots + \binom{12}{5}) / \binom{12}{6}$$

Nu is

$$\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \dots + \binom{12}{12} = 2^{12}$$

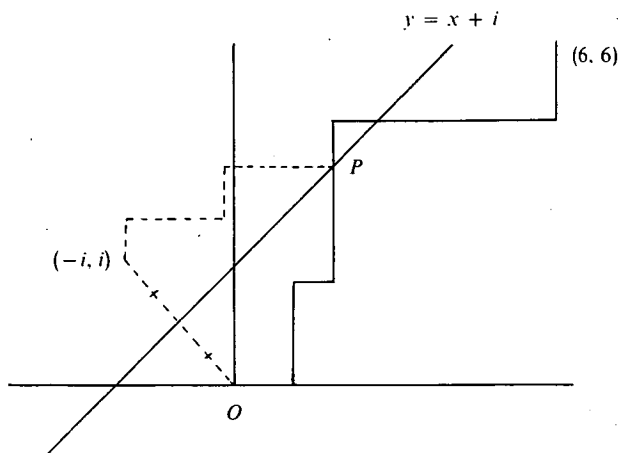
dus

$$\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \dots + \binom{12}{5} = \frac{1}{2}(2^{12} - \binom{12}{6})$$

Zodat we voor de gemiddelde tijdsoverschrijding vinden

$$\frac{2^{11}}{\binom{12}{6}} - \frac{1}{2} = 1,72$$

In het algemeen vinden we $\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} - \frac{1}{2}$.



426. Voor de opgave zie het voorgaande nummer. De vragen worden hier kort beantwoord.

1 $D_1(x) \Rightarrow x$ is niet machtloos (Ax 3) $\Rightarrow D_3(x)$

$D_3(x) \Rightarrow D_1(x)$ (volgt uit stelling 3)

$D_2(x)$ is niet ekwivalent met $D_1(x)$ en $D_3(x)$. Onderstel $\{x, y\}$ met $x \neq y$ is de enige minimale winstcoalitie. Dan is voldaan aan $D_2(x)$ en niet aan $D_3(x)$.

2 Stelling 1. A is winstcoalitie (Ax 3, Ax 1). Het complement dus verliescoalitie.

Stelling 2. Volgt uit Ax 1 en definitie verliescoalitie.

Stelling 3. Volgt uit definitie verliescoalitie, Ax 2 en stelling 2.

Stelling 4. Volgt uit stelling 3.

3 $V_1(x) \Rightarrow x$ is element van elke winstcoalitie (Ax 2) $\Rightarrow V_2(x)$

$V_2(x) \Rightarrow V_1(x)$ (definitie verliescoalitie)

$V_3(x) \Rightarrow A \setminus \{x\}$ is geen winstcoalitie $\Rightarrow V_1(x)$

$V_1(x) \Rightarrow V_3(x)$ geldt niet. Men ziet dit door aan te nemen dat x dictator is.

4 Onderstel er is geen dictator. Dan is $\{x\}$ geen winstcoalitie.

$V_1(x) \wedge \{x\}$ is geen winstcoalitie $\Rightarrow V_3(x)$

5 $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ zijn machtloos $\Rightarrow A \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ is een winstcoalitie $\Rightarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ is een verliescoalitie $\Rightarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ is geen blokkeercoalitie

6 $A = \{p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2\}$

De minimale winstcoalities zijn de coalities die bestaan uit 4 elementen w.o. ten minste één van de elementen p_i , ten minste één van de elementen q_i en ten minste één van de elementen r_i .

Onderstel de stemgewichten van $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ zijn resp. $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$. Het getal r is willekeurig.

We houden dan dezelfde winstcoalities als we aan p_1 en p_2 toekennen het stemgewicht $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, aan q_1 en q_2 het stemgewicht $b = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ en aan r_1 en r_2 het stemgewicht $c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$, terwijl r onveranderd blijft.

Nu is $\{p_1, p_2, q_1, r_1\}$ winstcoalitie en zijn $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ en $\{p_1, p_2, r_1, r_2\}$ blokkeercoalities. Dus is

$$2a + b + c > 2a + 2b \text{ en } 2a + b + c > 2a + 2c$$

Hieruit volgt $c > b$ en $b > c$. Contradictie.

(Steiner geeft een ander, ingewikkelder tegenvoorbeeld.)

Boekbesprekingen

Kenneth L. Whipkey, Mary Nell Whipkey, *The Power of Calculus*, John Wiley & Sons, £ 11,25, S 21,00.

Het boek, ontstaan uit gegeven colleges, is bestemd voor studenten 'business, economics, biology and social studies', die een inleiding behoeven tot de analyse.

Het schrijversechtpaar gaat er van uit dat deze studenten het meest aangesproken worden door voorbeelden en vraagstukken uit hun discipline. Aan deze problemen en probleempjes willen zij 'develop an appreciation of the power, elegance, and efficiency of the calculus'. Het komt mij voor dat dit een buitengewoon goed uitgangspunt is ter motivering van de student. Inderdaad zijn er in het boek zeer vele van dergelijke problemen opgenomen.

Een overzicht hiervan is aan de binnenzijde van de kaft vermeld, verdeeld over de onderwerpen 'Business and Economics, Physical and Geometrical, Probability and Statistics, Computer Problems, Biology and Medicine, Ecology, Population, Chemistry, Psychology'.

Niet alleen door het kiezen van de voorbeelden en opgaven bevorderen de schrijvers de motivatie en wekken zij de belangstelling, maar ook hun zorg om 'symbol shock' en 'function fatigue' tot een minimum te beperken dient dit streven.

Dit komt door het gehele werk duidelijk tot uiting in de gebruikte taal en de presentatie van de onderwerpen. Toch wordt hierdoor geen geweld gedaan aan de wiskundige inhoud van het geheel. De schrijvers beginnen de hoofdstukken met een 'Overview' en eindigen met een 'Chapter review' (opsomming van onderwerpen, opgaven, e.d.). Sommige hoofdstukken hebben nog een 'In retrospect' waarin ingegaan wordt op het verband met het behandelde en de komende stof. De lezer wordt duidelijk gewezen op het probleemgebied dat in wezen de oorsprong van de analyse is: het gebied van *verandering*. Op dit begrip willen we vat krijgen, we zoeken naar een rate of change. Door middel van een beschouwing over gemiddelde snelheid en momentane snelheid wordt de noodzaak geïllustreerd van de ontwikkeling van limieten. Op deze wijze behandelen de schrijvers:

Limits. Derivatives and Continuity; Differentiation techniques (kettingregel, impliciet differentiëren, hogere orde afgeleiden, middelwaardestelling); Applications of the derivative (extrema); Integration (onbepaalde integraal, Riemann integraal, integratie technieken, regel van Simpson); The Logarithmic and exponential functions (met toepassingen op bijv. groeiproblemen); Partial Derivatives and multiple integrals (met bijv. bepaling van extremen).

Tenslotte de antwoorden van een aantal problemen en een index.

Al met al een voor het gestelde doel voortreffelijk leerboek.

W. Kleijne

Franz Locher, *Einführung in die Numerische Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt. 1978. 265 blz.

In dit boekje komen de volgende standaardonderwerpen uit de Numerieke Wiskunde aan de orde:

- 1 Het effect op het eindantwoord van (af rond) fouten, die in de loop van een berekening geïntroduceerd worden;
- 2 Iteratieve methoden voor de benaderende oplossing van stelsels niet-lineaire vergelijkingen (o.a. dekpuntstelling van Banach, methode van Newton);
- 3 Iteratieve methoden en eliminatie methoden (met foutenanalyse) voor stelsels lineaire vergelijkingen;
- 4 De berekening van eigenwaarden en eigenvectoren van matrices (o.a. Householder transformaties, iteratie volgens Wielandt);
- 5 Interpolatie en numerieke integratie (o.a. kern van Peano, integratie volgens Romberg);

6 Approximatietheorie (o.a. een bewijs van de stelling van Weierstrass met behulp van Korovkin's stelling over positieve operatoren).

Bij elk van deze onderwerpen heeft de schrijver zich beperkt tot het bespreken van slechts enkele belangrijke numerieke technieken. Hierbij heeft hij een goede keuze gedaan, en de onderwerpen overzichtelijk gepresenteerd. Ik heb slechts weinig (druk)fouten aangetroffen.

Als aanmerking valt te noemen, dat de schrijver vrij grote stappen in sommige afleidingen neemt. Ook is het jammer, dat hij in de tekst niet vaker verwijst naar de literatuurlijst die achterin het werk is opgenomen.

Al met al geeft het boekje een bruikbare, beknopte inleiding tot de Numerieke Wiskunde. Als voorkennis wordt slechts analyse en lineaire algebra (prekandidaatsniveau) verondersteld.

M. N. Spijker.

Krabs, W., *Einführung in die Kontrolltheorie*, Darmstadt. Wissenschaftliche Buchgesellschaft. 1978. X + 152 blz., prijs DM 18,00.

Dit boekje bevat de stof die de auteur in kolleges over dit onderwerp aan de T. H. Darmstadt heeft gegeven. Het is een inleidend boek waarvoor geen voorkennis vereist wordt. In een appendix van 30 blz. worden de gebruikte begrippen uit de theorie van de Hilbertruimten samengevat.

De probleemstelling wordt duidelijk vermeld. Terecht beperkt de auteur zich in deze inleiding tot lineaire systemen. Een behandeling van de (meer-realistische) niet-lineaire systemen zou het inleidende karakter van dit boek verstoren.

J. L. Mijnheer

Zahn, Peter, *Ein konstruktiver Weg zur Masstheorie und Funktionenanalysis*. 1978. IV. 350 S.-Kart., DM 42,00.

De bedoeling van dit boek is een aanvullend leerboek te zijn op de bekende leerboeken van P. Lorenzen: *Einführung in die operative Logik und Mathematik* (1955) en *Differential und Integral* (1965). De aanvulling is hierin gelegen dat aan de onderwerpen voor vervolgcursussen in de constructieve analyse enige worden toegevoegd. Lorenzen gaf naast de klassieke elementaire analyse reeds een inleiding in de differentiaalmeetkunde en meerdimensionale integralen. Zahn voegt hieraan toe een inleiding in topologische, metrische en genormeerde ruimten met de vaste puntenstelling van Banach en toepassing op integraalvergelijkingen en stelsels vergelijkingen, en een korte inleiding in de theorie der lineaire operatoren en functionalen (stelling van Hahn-Banach).

Alle nodige hulpmiddelen worden in de eerste drie hoofdstukken (Inleiding in de constructieve analyse, maattheorie, integratietheorie) ontwikkeld, zodat het geheel als handleiding kan dienen voor een tweedelige cursus in de constructieve analyse. Enige vertrouwde met de beginselen der 'operative Logik' van Lorenzen is daarbij echter wel gewenst.

B. van Rootselaar

O. V. Besov, V. P. Ilin, S. M. Nikolskii, *Integral representations of functions and imbedding theorems, Volumes I and II (Scripta Series in Mathematics)*, John Wiley and Sons, New York-Toronto-London-Sydney, 1978-79, deel I: VIII + 345 bl., deel II: VIII + 311 bl.

Deze boeken bevatten een uitvoerig overzicht (voorzien van vele en meestal ingewikkelde technische details) van zekere klassen van functies, die een belangrijke rol spelen in de theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen. Bekende voorbeelden van zulke functieklassen zijn de 'ruimten van Sobolev', bestaande uit functies, gedefinieerd op een gebied G in $\mathbb{R}^n$, en wel zodanig dat

alle partiële afgeleiden tot en met zekere orde op G bestaan en bovendien nog aan zekere integreerbaarheidseisen voldoen. Deze functieklassen werden door Sobolev reeds in de dertiger jaren ingevoerd. Verder uitvoerig onderzoek was vooral te danken aan de school rondom Nikolskii, één der auteurs van dit boek. Een punt dat steeds ter sprake komt is het onderling vergelijken van twee functieklassen van het genoemde type en het nagaan onder welke voorwaarden één van de twee op 'continue' wijze als deelklasse van de andere op te vatten is (vandaar de term 'inbedding'). Integralen spelen een grote rol omdat de metriek in de functieklassen gedefinieerd wordt met behulp van de bekende L_p -metriek voor f en voor de partiële afgeleiden van f ; dus voor f zelf treedt dan op

$$(\int_G |f(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_n)^{1/p}.$$

A. C. Zaanen

Dr. F. Loonstra, *Inleiding tot de algebra*, zesde druk, Wolters-Noordhoff, Groningen 1979, 360 blz., f62, —.

Dit boek is bestemd voor propaedeutisch onderwijs aan universiteiten, onderwijs aan de TH en voor onderwijs aan mo-A cursussen. Van belang is dan ook een goede aansluiting bij het vwo. Om die reden is de presentatie van de stof in deze druk essentieel verschillend van die in de vorige. In de eerste drie hoofdstukken vindt men, bij wijze van inleiding, een behandeling van verzamelingen en afbeeldingen, getsystemen tot en met het complexe en heel in het kort van matrices en determinanten. Dan komt het centrale onderwerp: de algebraïsche structuren. Men treft hier de groepen aan met hun normale delers, de ringen met hun idealen, de lichamen en in het kort de moduli en de vectorruimten. De theorie van de lichamen mondt uit in uitbreiding door middel van adjunctie met als sluitstuk de Galois-theorie.

De behandelingswijze is duidelijk en niet zo uitvoerig, dat men de eigen hersens onvoldoende moet inschakelen. Een grote collectie vraagstukken maakt training in ruime mate mogelijk. Bovendien vinden de mo-A kandidaten nog achterin de examens uit de jaren 1958–1978.

Het heeft me verbaasd dat in de vernieuwde presentatie niet (of nauwelijks) gebruik is gemaakt van symbolen voor logische connectieven en voor kwantoren. De betoogtrant doet daardoor soms wat ouderwets aan. Het onbepaalde lidwoord 'een' krijgt een steeds wisselende betekenis. Deze kan zijn:

a een of andere ('een' heeft de functie van een vrije variabele):

b er is een ('een' heeft de functie van een existentiële kwantor):

c elk ('een' heeft de betekenis van een universele kwantor).

Ter adstructie een passage uit de formulering van de grondstelling van de Galois-theorie (blz. 316–317):

'Voor een gegeven tussenlichaam M bestaat de bijbehorende groep uit die elementen van G die M invariant laten . . . Elke isomorfie van M in een uitbreiding van L , die K elementsgewijs vastlaat, krijgt men door toepassing van een automorfie $\varphi \in G$ op M . . .'

Hier heeft 'een' achtereenvolgens de betekenis elk, een of andere, er is een. (Het woord 'gegeven' kan men beter wegdelen.)

Een goede verstaander heeft aan een half woord genoeg. Maar ik heb toch wel eens een passage moeten herlezen om na te gaan wat met 'een' bedoeld werd.

Met deze opmerking wil ik echter niet graag afbreuk doen aan de goede kwaliteiten die dit boek zonder twijfel heeft.

P. G. J. Vredenduin

Mededelingen

Contacten met België

Zesde gemeenschappelijke studiedag van de NVvW en de VVWL

De zesde gemeenschappelijke studiedag van de Nederlandse en de Vlaamse wiskundeleraren zal gehouden worden op *zaterdag 28 maart*. Nadere bijzonderheden volgen. Wilt u nu reeds de datum noteren?

De bijeenkomst zal waarschijnlijk plaats hebben in Kapellen, gelegen aan de spoorlijn Roosendaal-Antwerpen en aan de weg Bergen op Zoom-Antwerpen.

Als thema is gekozen:

De geschiedenis van de wiskunde en het onderwijs.

We hopen op een grote belangstelling, ook van Nederlandse zijde.

Jaarvergadering VVWL

De jaarvergadering van de VVWL zal plaats hebben op *zaterdag 21 februari* te Leuven, op de Campus van de faculteit der Wetenschappen te Heverlee (grenzend aan Leuven).

Het onderwerp voor die dag zal zijn: orderrelaties.

Belangstellenden uit Nederland zijn van harte welkom.

Tweejaarlijks congres van de VVWL

Dit zal plaats hebben van *26 juni tot en met 29 juni* te Neerpelt. Ook hier zijn belangstellenden uit Nederland graag welkom.

Wiskunde en Onderwijs

Leden van de NVvW kunnen tegen gereduceerde prijs een abonnement krijgen op het tijdschrift van de VVWL: Wiskunde en Onderwijs. Ze zijn dan automatisch ook lid van deze vereniging. De prijs van dit abonnement is thans *f* 27,50, dus iets meer dan verleden jaar. Maar het tijdschrift is ook aanmerkelijk dikker geworden de laatste jaren. Men vindt in dit tijdschrift verscheidene bijdragen op wetenschappelijk gebied over onderwerpen die min of meer in verband staan met de schoolwiskunde. Daarnaast artikelen op didactisch gebied en een rubriek opgaven, waarin problemen de lezer voorgelegd worden waarvan in een later nummer de binnengekomen oplossingen gepubliceerd worden. De lopende jaargang bestaat uit 4 afleveringen van elk 136 bladzijden.

Willen de abonnees hun abonnementsgeld 1981 *voor 15 december* voldoen door storting van *f* 27,50 op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth (die dit bedrag in januari moet overmaken aan de VVWL)? Bij voorbaat dank.

Een abonnement op dit tijdschrift is stellig aan te bevelen. Nieuwe abonnees kunnen zich opgeven door storting op de aangegeven wijze en vermelding op het stortingsformulier van 'nieuw abonnee'.

WINTERSYMPOSIUM van het WISKUNDIG GENOOTSCHAP, UTRECHT, 10 januari 1981

Onderwerp: WISKUNDE - SAAI OF SPANNEND?

Programma:

- 9.30-10.20 Ontvangst en koffie
10.20 Opening door de voorzitter van het Wiskundig Genootschap, Prof. dr. M. A. KAASHOEK
10.30-11.30 Prof. dr. P. C. BAAYEN, Vrije Universiteit en Mathematisch Centrum,
'Vorm versus inhoud in de wiskunde' (Wiskunde saai? of alleen de wiskundigen?)
11.30-12.30 Dr. J. van LINT, Rijkscholeningsgemeenschap Zwolle,
'Ik zie, ik zie wat jij niet ziet' (Meetkunde vroeger en nu)
12.30-14.00 Lunchpauze
14.00-15.00 Prof. D. A. KLARNER, State University of New York, Binghamton, tijdelijk:

Technische Hogeschool Eindhoven,
'Mijn leven tussen de polyomino's' (Spanningen rond speelse wiskunde)

Plaats:

College Blaucafel, Winklerlaan 373, Utrecht

te bereiken: per trein: uitstappen bij station Overvecht of bij Centraal Station en dan buslijn 9 nemen, richting Overvechtstation!; vanaf station Overvecht via de Albrecht Thaerlaan (evenwijdig aan de zuidkant van de spoorlijn) naar de Prof. Magnuslaan; aan het einde van die laan ligt College Blaucafel.

per auto: vanaf verkeersplein Oudenrijn richting Hilversum nemen, daar afslag Utrecht Noord, dan afslag Utrecht Centrum over de spoorlijn 1e laan rechts is de Winklerlaan.

Aanmelding: Schriftelijk aanmelden (toegang is gratis!) bij:

Drs. G. W. de Vries, Burg. Martenslaan 46, 3956 EN Leersum.

Lunch:

De mogelijkheid om deel te nemen aan een gezamenlijke lunch bestaat; de kosten hiervan bedragen f10,-. Wanneer men hiervan gebruik wenst te maken dient men tien gulden per persoon over te maken op de postgirorekening 468081 van drs. G. W. de Vries, Burg. Martenslaan 46, Leersum, onder vermelding 'Lunch Wintersymposium WG', vóór de 15e december 1980.

INLICHTINGEN ZIJN VERKRIJGBAAR BIJ:

Drs. G. W. de Vries, Burg. Martenslaan 46, Leersum, tel. 03434-3059 en Mathematisch Centrum, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, tel. 020-5924176.
Mw. S. J. Kuipers-Hoekstra.

Pascal, Nederlands rekenwonder sinds jaren vermeld in het beroemde **Guinness Book of Records**.

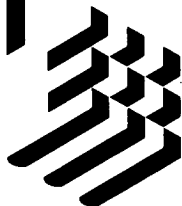
Zie de levende computer aan het werk.
Iedere middelbare scholier moet dit evenement minstens eenmaal hebben meegemaakt.

Voor inlichtingen, programma en honorarium: Wim Klein
Brouwersgracht 32, 1013 GW Amsterdam, tel.: 020-26 28 10

GETAL EN RUIMTE 2HV2

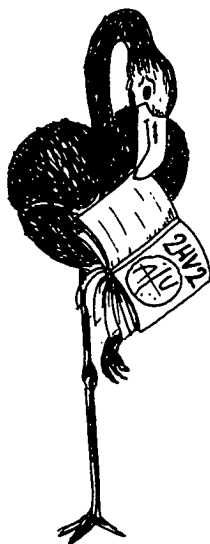
Auteurs en uitgever geven u met blijdschap kennis van de geboorte van een nieuwe telg! Aan de bekende wiskundemethode Getal en Ruimte werd het deel 2HV2 toegevoegd, opgezet volgens het BHE-model en te gebruiken in de 2e helft van het tweede leerjaar havo en/of vwo

Bestellen onder nummer ISBN 9011 **811445**
(antwoorden bij 2HV2: ISBN 9011 **811453**,
handleiding bij 2HV2: ISBN 9011 **811461**).

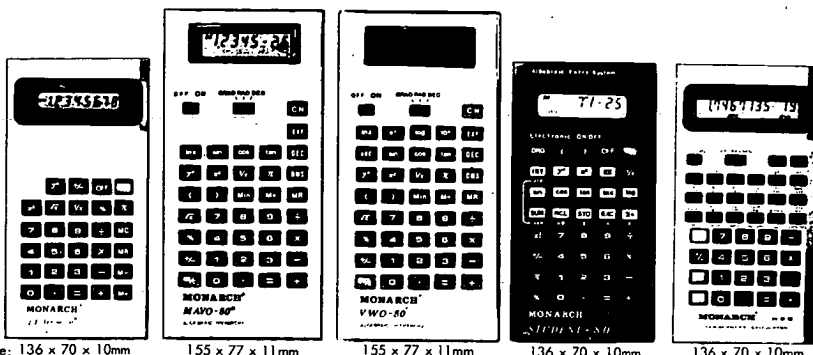


Educaboek

Postbus 48, 4100 AA Culemborg, Tel. 03450-3143



Doe de lessenaarproef met de nieuwe generatie Monarch handrekenmachines



ware grootte: 136 x 70 x 10mm

155 x 77 x 11mm

155 x 77 x 11mm

136 x 70 x 10mm

136 x 70 x 10mm

De vele pluspunten van de nieuwe generatie MONARCH handrekenmachines.

- Vijf aangepaste modellen voor de diverse onderwijsniveau's.
- Uitgebreide nederlandse gebruiksaanwijzingen met gemiddeld 65 uitgewerkte voorbeelden, geënt op de diverse leerniveau's. Zeer geschikt voor klassikale instructie van de handrekenmachine.
- Bij de modellen MAVO-80 en VWO-80 wordt gratis het Vademecum-A met ruim 200 onderwerpen (algemeen, wis-, natuur-, scheikunde) bijgeleverd.
(Winkelwaarde f 12,50 ISBN 90 70080 80X. Samengesteld door leraren).
- Gratis transparanten voor de overheadprojektor worden bijgeleverd.
- Met de enkelfunctie modellen LEAO-80, MAVO-80, VWO-80 maakt iedere leerling(e) beslist minder foutieve intoetsingen.
- Door de ruime toetsen worden dubbelaanslagen voorkomen.
- In de toets ingegraveerde symbolen, dus ook na jarenlang intensief gebruik duidelijke afleesbaarheid. (geldt nog niet voor model HBO).
- Nu met onverwoestbare klik-schakelaars, vernieuwde batterijklep, gevoeliger druktoetsen.
- Modellen MAVO-80 en VWO-80 met dubbel beveiligde uitlezing tegen breuk.
Uitermate solide, vergrootte modellen, verzonken in rubber stootranden, dus ekstra goed bestand tegen vallen en harde schokken. doe zelf de lessenaarproef!
- LCD-uittezing: twee knoopcelbatterijtjes voor een heel jaar rekenen.
- Vlotte garantie gedurende 18 maanden. Zeer snelle garantieservice ± 1 week.

**Schoolprijzen reeds vanaf f 39,— inkl. btw,
franko afgeleverd aan school.**

Vraag uitgebreide dokumentatie en prijzen aan:

MAKUPORT ELECTRONICS BV

J. Tademaweg 9, 2031 CT Haarlem, tel. 023 - 31 78 50*

INHOUD

J. Schilder: 0, 1, 2, . . . ofwel Wiskunde-onderwijs aan anderstaligen	121
C. J. Penning: Rechte lijnen	135
R. Leentfaar: Raaklijnen aan tweedegraadskrommen in het havo-onderwijs	138
O. Bottema: Het koffiefilter als prismoïde	141
A. van de Ven: De rol van voorstellingen en materiële handelingen bij wiskunde-onderwijs aan een blinde leerling	145
A. M. Mijnlief: Korrel	152
Recreatie	153
Boekbesprekingen	155
Mededelingen	158

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

- O. Bottema, Ch. de Bourbonstraat 2, 2628 BN Delft.
R. Leentfaar, 't Weerom 5, 2991 ER Barendrecht.
A. M. Mijnlief, Ulvenhoutselaan 32, 4834 MG Breda.
C. J. Penning, Nic. Anslijnstraat 149, 1068 WX Amsterdam.
J. N. Schilder, Langemeerstraat 14, 1135 JE Edam.
A. van de Ven, Burg. Schafratstraat 38, 5427 SR Boekel.